

M. GANTELET

Corrigé

Exercice n° 1

$$1) \cdot M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right) \quad \text{car } \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + 0 \cdot \vec{AD} + 0 \cdot \vec{AE}$$

$$\cdot E(0; 0; 1) \quad \text{car } \vec{AE} = 0 \cdot \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AD} + 1 \cdot \vec{AE}$$

$$2) N \text{ est le milieu de } [BC] \text{ donc } \vec{BN} = \frac{1}{2}\vec{BC} \quad (*)$$

Pour avoir les coordonnées de N il faut exprimer $\vec{AN}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

Or par la relation de Chasles $\vec{BN} = \vec{BA} + \vec{AN}$
et $ABCDEF$ étant un cube $\vec{BC} = \vec{AD}$

$$\text{Ainsi } (*) \text{ devient } \vec{BA} + \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AD}$$

(1) Ici

$$\vec{AN} = -\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

Soit

$$\vec{AN} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

$$\| \text{CCL} : \vec{AN} = 1 \cdot \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + 0 \cdot \vec{AE} \quad \text{donc } N \text{ a pour coordonnées } (1; \frac{1}{2}; 0)$$

3) $\vec{n}$ est normal à (MNE) si il est normal à deux vecteurs non colinéaires du plan (MNE) . Formons donc deux vecteurs de (MNE) :

$$\vec{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \\ z_N - z_M \end{pmatrix} ; \vec{MN} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \vec{MN} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{NE} \begin{pmatrix} x_E - x_N \\ y_E - y_N \\ z_E - z_N \end{pmatrix} ; \vec{NE} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 0 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{NE} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{MN} = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} + 0 \times 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{NE} = 1 \times (-1) + (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times 1 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

CCL : $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{MN}$ et $\vec{NE}$ deux vecteurs non colinéaires (*) du plan (MNE), donc $\vec{n}$ est normal à MNE.

(*) leur coordonnées ne sont pas proportionnelles

4) $E \in (MNE)$ et $\vec{n}$ est normal à (MNE) donc une équation cartésienne de (MNE) est :

$$a(x - x_E) + b(y - y_E) + c(z - z_E) = 0$$

où $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à MNE.

Or $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $E(0; 0; 1)$, donc une équation cartésienne de (MNE) est :

$$1 \times (x - 0) + (-1) \times (y - 0) + \frac{1}{2} (z - 1) = 0$$

Soit

$$\boxed{x - y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0}$$

5) H a pour coordonnées (0; 1; 1)

$$\text{Or } x_H - y_H + \frac{1}{2}z_H - \frac{1}{2} = 0 - 1 + \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \neq 0$$

Les coordonnées de H ne vérifient pas l'équation cartésienne de (MNE)

donc $\boxed{H \notin (MNE)}$

6) (d) passe par $H(0; 1; 1)$ et est perpendiculaire à (MNE)

Donc (d) est dirigée par $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ normal à (MNE).

Donc

$$(d) : \begin{cases} x = x_H + 1 \times t \\ y = y_H + (-1) \times t \\ z = z_H + \frac{1}{2} \times t \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$: c'est une équation paramétrique de (d).

D'où

$$(d) : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{CCL : } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{est bien une équation paramétrique de (d)}$$

7) $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ où B est la base de MNEH, soit l'aire de MNE.
 h est la hauteur

Or ici h est la distance du point H au plan (MNE).

Déterminons le projeté orthogonal de H sur (MNE) et appelons-le H' .

H' est l'intersection du plan (MNE) et de la droite (d).

Soit $H'(x_{H'}; y_{H'}; z_{H'})$.

Donc :

$$H' \in (MNE) \cap (d) \iff \begin{cases} x_{H'} = 0 + t \\ y_{H'} = 1 - t \\ z_{H'} = 1 + \frac{1}{2}t \\ x_{H'} - y_{H'} + \frac{1}{2}z_{H'} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$H' \in (MNE) \cap (d) \iff \begin{cases} x_{H'} = t \\ y_{H'} = 1-t \\ z_{H'} = 1 + \frac{1}{2}t \\ t - (1-t) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$H' \in (MNE) \cap (d) \iff \begin{cases} x_{H'} = t \\ y_{H'} = 1-t \\ z_{H'} = 1 + \frac{1}{2}t \\ \frac{9}{4}t - 1 = 0 \end{cases}$$

$$H' \in (MNE) \cap (d) \iff \begin{cases} x_{H'} = t \\ y_{H'} = 1-t \\ z_{H'} = 1 + \frac{1}{2}t \\ t = \frac{4}{9} \end{cases}$$

$$H' \in (MNE) \cap (d) \iff \begin{cases} x_{H'} = \frac{4}{9} \\ y_{H'} = \frac{5}{9} \\ z_{H'} = \frac{11}{9} \\ t = \frac{4}{9} \end{cases}$$

Le projeté orthogonal de H' sur (MNE) est donc $H'\left(\frac{4}{9}; \frac{5}{9}; \frac{11}{9}\right)$

donc h la hauteur du tétraèdre est la distance HH' .

$$h = \sqrt{(x_H - x_{H'})^2 + (y_H - y_{H'})^2 + (z_H - z_{H'})^2}$$

$$h = \sqrt{\left(0 - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{11}{9}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}}$$

$$h = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Conclusion : Le volume du tétraèdre $MNEH$ est donc :

$$V = \frac{1}{3} \times 0,38 \times \frac{2}{3} = \frac{0,76}{9} = \frac{76}{900} \approx \boxed{0,084}$$

Exercice n°2 :

PARTIE A : Soit $f(x) = x - \ln(x-1)$

$$1) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \end{cases}$$

donc pas limite d'une composée :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) = -\infty$$

Or $\lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1^+$ donc par limite d'une somme

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x - \ln(x-1) = +\infty$$

CC : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

2) $f(x) = x - \ln(u(x))$ où $u(x) = x - 1$

Donc $f'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u'(x) = 1$

soi $f'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$

CC : $f'(x) = \frac{x-2}{x-1}$

3) Construisons un tableau de signe de $f(x)$ sur $]1; +\infty[$

x	1	2	$+\infty$
Signe de $x-1$	0	+	
Signe de $x-2$		-	+
Signe de $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$		-	+
Variations de f		$+\infty$ ↘ 2 ↗ $+\infty$	

car $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

car $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

par règle des signes d'un quotient.

$$f(2) = 2 - \ln(2-1) = 2 - \ln(1)$$

$$f(2) = 2 - 0$$

$$f(2) = 2$$

4) D'après le tableau de variations ci-dessus, on observe que 2 est le minimum de f atteint en $x=2$.

Donc $\forall x \in]1; +\infty[\quad f(x) \geq 2$

PARTIE B :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) $u_1 = f(u_0) = f(10) = 10 - \ln(10-1) = 10 - \ln(9) = 10 - 2\ln(3)$

CC : $u_1 = 10 - 2\ln(3) (\approx 7,80)$
 ↑ (approximation non demandée)

2) Soit $P(n) : "u_n \geq 2" \quad \forall n \geq 0$

montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 0$

→ Initialisation :

à $n=0$ $u_1 = u_0 = 10 \geq 2$ donc $P(0)$ est vraie

Ainsi $P(n)$ est initialisée à $n=0$

→ Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ soit vrai
c'est-à-dire :

$$u_k \geq 2 \quad (H_k)$$

Montrons que $P(k+1)$ est vraie également, c'est-à-dire :

$$u_{k+1} \geq 2$$

Par hypothèse de récurrence $u_k \geq 2$

Donc

$$f(u_k) \geq f(2)$$

par croissance de la fonction f
(voir partie A) sur $[2; +\infty[$
l'ordre est conservé.

Donc

$$u_{k+1} \geq f(2) \Leftrightarrow u_{k+1} \geq 2$$

car $f(2) = 2$ par A) 3).

Ainsi $P(n)$ est héréditaire.

→ Conclusion :

$P(n)$ étant vraie à $n=0$ et héréditaire, elle est
vraie pour tout $n \geq 0$.

$$\| u_n \geq 2 \quad \forall n \geq 0$$

$$3) \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n - 1) \quad \text{par définition de } f$$

$$\text{Donc } u_{n+1} - u_n = \cancel{u_n} - \ln(u_n - 1) - \cancel{u_n} = -\ln(u_n - 1)$$

$$\text{Or par 2) } u_n \geq 2 \quad \text{donc } u_n - 1 \geq 1$$

$$\text{Or } \ln \text{ est croissante} \quad \text{donc } \ln(u_n - 1) \geq \ln(1) \quad \forall n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(u_n - 1) \geq 0 \quad \forall n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\ln(u_n - 1) \leq 0 \quad \forall n \geq 0$$

$$\text{On a donc } u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall n \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \geq 0$$

CC : (u_n) est décroissante.

4) (u_n) est décroissante par 3) et minorée par 2 par 2)

Donc (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$

$$5) \quad l \text{ vérifie donc } l = f(l) \quad (\Rightarrow) \quad l = l - \ln(l - 1)$$

$$\Leftrightarrow \ln(l - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow l - 1 = e^0 = 1$$

$$\Leftrightarrow l = 2$$

$$\boxed{\text{CC} : \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

6) seuil(1) renverra à partir de quel entier n on aura:

$$u_n - 2 \leq 10^{-1} \quad (\Rightarrow) \quad u_n \leq 2 + 10^{-1}$$

$$(\Rightarrow) \quad u_n \leq 2,1$$

Or d'après la calculatrice

n	u_n
5	$\approx 2,36$
6	$\approx 2,05$

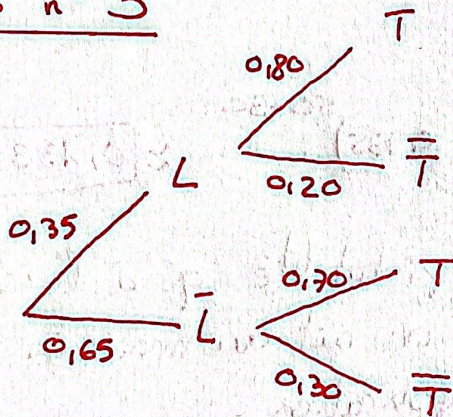
$\downarrow 2,1$

Donc à partir de $n=6$ on a $u_n \leq 2,1$

|| Donc seuil(1) renverra 6

Exercice n° 3

1)



2) On cherche $P(L \cap T)$; Or $P(L \cap T) = P(L) \times P_L(T)$

Donc $P(L \cap T) = 0,35 \times 0,80 = 0,28$

|| CL: La probabilité qu'un adolescent soit Lycéen et utilise TrkTuk est de 0,28.

3) L et $\bar{L}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(L \cap T) + P(\bar{L} \cap T)$$

$$P(T) = P(L) \times P_L(T) + P(\bar{L}) \times P_{\bar{L}}(T)$$

$$P(T) = 0,35 \times 0,80 + 0,65 \times 0,70$$

$$P(T) = 0,735$$

4) On cherche $P_T(L)$

$$\text{Or } P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0,28}{0,735} \approx \boxed{0,38}$$

CCL: La probabilité que cette personne utilisant cette appli soit lycéen est donc de 0,38.

5) On réalise une expérience aléatoire à deux issues possibles:

- Succès: "L'utilisateur utilise Tik-Tok"
- Echec: "L'utilisateur n'utilise pas Tik-Tok".

On répète cette expérience 50 fois. Les répétitions sont indépendantes. De plus X est la variable aléatoire dénombrant le nombre d'adolescents utilisant Tiktok à l'issue des 50 répétitions. Ainsi X compte les succès.

CCL: X suit une loi binomiale de paramètre $n = 50$
 $p = P(T) = 0,735$.

$$6) P(X=30) = \binom{50}{30} \times 0,735^{30} \times (1-0,735)^{50-30} \approx \boxed{0,1339}$$

7) $P(X \geq 40)$ correspond à la probabilité qu'à l'issue des 50 tirages on ait au moins 40 utilisateurs de l'application.

D'après la calculatrice: $P(X \geq 40) \approx \boxed{0,1907} \neq 0,25$

• Casio: $1 - \text{binomfcd}(39, 50, 0,735)$
 $P(X \leq 39)$ car $P(X \geq 40) = 1 - P(X \leq 39)$

• Ti: $1 - \text{binomfrep}(50, 0,735, 39)$

CCL: l'affirmation est donc incorrecte, le % de chances est de 19% environ

8) Le nombre moyen correspond à l'espérance $E(X) = n \times p = 50 \times 0,735 \approx 36,75$
soit un nombre moyen d'environ 37. (10)

$$9) P(X=n) = \binom{n}{n} p^n \times (1-p)^{n-n} = \binom{n}{n} p^n \times (1-p)^0 = \binom{n}{n} \times p^n$$

$$Or \quad \binom{n}{n} = \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!} \times (n-n)!} = \frac{1}{0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{Donc } P(X=n) = 0,735^n$$

$$10) P(X=n) \leq 0,02 \Leftrightarrow 0,735^n \leq 0,02$$

$$P(X=n) \leq 0,02 \Leftrightarrow \ln(0,735^n) \leq \ln(0,02)$$

$$P(X=n) \leq 0,02 \Leftrightarrow n \ln(0,735) \leq \ln(0,02) \quad \begin{array}{l} \text{par croissance de} \\ \text{la fonction } \ln \end{array}$$

$$P(X=n) \leq 0,02 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,02)}{\ln(0,735)}$$

$$\begin{array}{l} (\text{car } \ln(0,735) < 0 \\ \text{car } 0,735 < 1) \end{array}$$

$$P(X=n) \leq 0,02 \Leftrightarrow n \geq 12,71$$

Ainsi $P(X=n) \leq 0,02$ lorsque n est supérieur ou égal à 13.

CC: À partir d'un échantillon de $n=13$ adolescents, la probabilité d'avoir exactement n adolescent utilisant l'application est inférieure à 0,02.

Exercice n°4 :

PARTIE A :

1) $f(0) = 1$

2) $f'(0.5)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0.5$, donc $f'(0.5)$ est le coefficient directeur de (T_1) .

Or (T_1) est horizontale donc $f'(0.5) = 0$

3) $f'(1.5)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1.5$, soit de (T_2) .

Or (T_2) passe par $A(1.5; 0.89)$ et $B(0; 3.5)$, donc

$$f'(1.5) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$f'(1.5) = \frac{3.5 - 0.89}{0 - 1.5} = -1.74$$

4) Graphiquement, il semblerait que f soit concave sur $]-\infty; 1.5]$.

PARTIE B :

$$f(x) = (2x + b)e^{-x} \quad b \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}$$

1) $f(0) = (2 \cdot 0 + b)e^{-0} = b$

Or par la partie A $f(0) = 1$ donc $b = 1$

2) $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 = -\infty$$

donc par limite d'un produit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1)e^{-x} = -\infty$$

3) $f(x) = (2x+1)e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f(x) = 2x \times e^{-x} + 1 \times e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $f(x) = 2x \times \frac{1}{e^x} + e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Soit $f(x) = \frac{2x}{e^x} + e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$ par croissances comparées

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

Donc par limite d'une somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

4) $f(x) = u(x) \times v(x)$ où $\begin{cases} u(x) = 2x+1 \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$

Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ avec $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

D'où $f'(x) = 2e^{-x} + (-e^{-x})(2x+1)$

$$f'(x) = e^{-x} [2 - 2x - 1]$$

$$f'(x) = (-2x+1)e^{-x}$$

5] $e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, donc $f'(x)$ est du signe de $-2x+1$

Or

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $-2x+1$	+	0	-

car $-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$

On en déduit les variations suivantes pour f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,21$	0

$$\text{car } f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right) e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

Rappel : $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

6) . Sur $]-\infty; \frac{1}{2}]$ f est continue, strictement croissante

Donc si $m \in]-\infty; \frac{2}{\sqrt{e}}]$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = m$ admettra une unique solution, sinon aucune.

• Sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$ f est continue, strictement décroissante

Donc si $m \in]0; \frac{2}{\sqrt{e}}]$ l'équation $f(x) = m$ admettra une unique solution par le théorème des valeurs intermédiaires, sinon aucune.

Conclusion :

→ Si $m \in]-\infty; 0]$ $f(x) = m$ admettra une unique solution sur $\mathbb{R}$

→ Si $m \in]0; \frac{2}{\sqrt{e}}]$ $f(x) = m$ admettra deux solutions sur $\mathbb{R}$.

→ Si $m \in]\frac{2}{\sqrt{e}}; +\infty[$ $f(x) = m$ n'admettra aucune solution sur $\mathbb{R}$.

7) La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

$$\text{Or } \begin{cases} f'(0) = (2 \times 0 + 1)e^{-0} = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Donc $y = 1(x-0) + 1$ Soit $y = x + 1$

CC : La tangente au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$

8) $f''(x) = (2x-3)e^{-x}$

$e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc $f''(x)$ est du signe de $2x-3$

Or

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $2x-3$	-	0	+

Car $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$

Donc $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in]-\infty; \frac{3}{2}]$ et $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\frac{3}{2}; +\infty[$

CC : f est concave sur $]-\infty; \frac{3}{2}]$ et convexe sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$