

Exercice 1

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

1. D'après le cours, on sait que $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x) = +\infty \text{ (par produit) donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables :

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

3. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$: $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > e^{-1}$

Donc :

- La fonction f est strictement décroissante sur $]0; e^{-1}]$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[e^{-1}; +\infty[$.

Exercice 2

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[1 ; 26]$ par : $f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10$
où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

$$f'(t) = 24 \times 1 \times \ln(t) + 24 \times t \times \frac{1}{t} - 6t + 0 = 24 \ln(t) - 6t + 24$$

2. a. On complète le tableau de variations de la fonction f' :

$$f'(1) = 18 > 0 ; f'(4) = 24 \ln 4 \approx 33,3 > 0 \text{ et } f'(26) = 24 \ln(26) - 132 \approx -53,8 < 0$$

t	1	4	α	26
$f'(t)$	18	33,3	0	-53,8

D'après ce tableau de variations, l'équation $f'(t) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1 ; 26]$ et cette solution, appelée α , est dans l'intervalle $[4 ; 26]$.

Plus précisément : $f'(14) \approx 3,34 > 0$ et $f'(15) \approx -1,01 < 0$ donc $14 < \alpha < 15$.

- b. Du tableau de variations, on peut déduire que $f'(t) > 0$ sur $[1 ; \alpha[$ et que $f'(t) < 0$ sur $] \alpha ; 26]$.

Donc la fonction f

- est strictement croissante sur $[1 ; \alpha]$;
- est strictement décroissante sur $[\alpha ; 26]$;
- atteint un maximum pour $x = \alpha$.

3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.

- a. L'expression mathématique suivante : « sur $[4 ; 26]$, f' est décroissante » signifie que sur cet intervalle, la vitesse de propagation de la maladie diminue.
- b. Le nombre de malades par semaine commence à diminuer quand la vitesse de propagation devient négative, donc quand $f'(t)$ devient négatif, c'est-à-dire pour $t > \alpha$; donc il s'est écoulé 14 semaines avant que le nombre de malades par semaine commence à diminuer.

Exercice n°3

1. a. Étudions la limite de f en 0.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \ln(x) = -\infty$.

D'autre part $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, alors par produit des limites, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

- b. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$,

D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, alors par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$,

On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, et en ajoutant ces deux dernières limites, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

- c. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ prouve que l'axe des ordonnées est asymptote verticale.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ que l'axe des abscisses est asymptote horizontale. à $\mathcal{C}$

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 f est dérivable sur $]0; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1 + \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

- b. $-1 - 2 \ln x > 0 \iff \ln x < -\frac{1}{2} \iff x < e^{-\frac{1}{2}}$.

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $f'(x)$ est du signe de $-1 - 2 \ln(x)$.

- c. Dresser le tableau des variations de la fonction f .

$$\text{On a } f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e^{-1}} = \frac{e}{2}$$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			$\frac{e}{2}$	
		$-\infty$		0

3. a. On a : $f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = e^{-1}$

Ce qui prouve que la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un unique point, le point de coordonnées $(e^{-1}; 0)$

- b. D'après le tableau des variations de f et sachant que $f(e^{-1}) = 0$.

On en déduit que $f(x) > 0$ sur l'intervalle $]e^{-1}; +\infty[$ et $f(x) < 0$ sur l'intervalle $]0; e^{-1}[$.

Exercice n°4

1. a. On lit $f(1) = y_B = 2$ et pour $f'(1)$, on lit le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1, c'est à dire le coefficient directeur de la droite (CB) , qui est horizontale, donc $f'(1) = 0$.

- b. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$, en tant que quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle (le dénominateur ne s'annulant pas sur cet intervalle).
On a :

$$f'(x) = \frac{\left(0 + b \times \frac{1}{x}\right) \times x - (a + b \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{b - (a + b \ln x)}{x^2}$$

$$\text{Soit effectivement : } f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}.$$

- c. On en déduit : $f(1) = \frac{a + b \ln(1)}{1} = a + 0 = a$, or d'après le 1. a.,

$$f(1) = 2, \text{ donc } a = 2.$$

$$\text{Dès lors, on a } f'(1) = \frac{(b-2) - b \ln(1)}{1^2} = b - 2, \text{ or d'après le 1. a., } f'(1) = 0, \text{ donc } b = 2.$$

2. a. On reprend la forme de f' obtenue précédemment, en remplaçant a et b par 2, et on a :

$$f'(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} = \frac{2}{x^2} \times (-\ln x).$$

Puisque pour tout x élément de $]0; +\infty[$, $\frac{2}{x^2}$ est un nombre strictement positif, on en déduit que la dérivée de f a bien le même signe que $-\ln x$ pour tout x élément de $]0; +\infty[$.

- b. Quand x tend vers 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc, par limite d'un produit et d'une somme : $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + 2 \ln x = -\infty$. Comme par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$, alors, par limite d'un quotient, on a $\lim_0 f = -\infty$.

Quand x tend vers $+\infty$, on va utiliser la forme de f présentée dans la question :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \text{ d'après la propriété des croissances comparées, et donc par limite d'une somme, puis par produit par 2 : } \lim_{+\infty} f = 0.$$

- c. On peut donc dresser le tableau des variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$-\ln x$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	2	0

3. a. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; 1]$ et 1 est une valeur strictement comprise entre $\lim_{x \rightarrow 0} f$ et $f(1)$, donc l'application du corollaire au théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une unique solution à l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$, qui sera notée α .
- b. Par balayage à la calculatrice, on obtient $f(5) > 1$ et $f(6) < 1$, donc comme la fonction f est continue sur $[5 ; 6]$, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[5 ; 6]$, et puisque l'on avait admis qu'il n'y avait qu'une seule solution β à cette équation sur $]1 ; +\infty[$, cette solution est donc entre 5 et 6. Enfin, puisque ni 5 ni 6 n'ont une image exactement égale à 1, on peut dire que β est strictement entre 5 et 6. Le nombre entier n cherché est donc 5.

Exercice n°5

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

- a. • $f_1(0) = 0$: évident ;
• $f_1(1) = 4 - 6 + 3 = 1$;
• f_1 fonction polynôme est dérivable sur $[0; 1]$ donc continue sur cet intervalle ;
• $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(4x^2 - 4x + 1) = 3(2x - 1)^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; 1]$ et f_1 est croissante sur cet intervalle.

f_1 est donc bien une fonction de retouche.

- b. Il semble que la courbe coupe la droite d'équation $y = x$ pour $x = 0$ et $x = 0,5$.

On peut vérifier que $f_1(0,5) = 0,5$.

On a donc $f_1(x) \leq x \iff x \geq 0,5$ ou $x = 0$.

Ce résultat signifie que f_1 éclaircit les nuances codées par un nombre supérieur à 0,5 et inversement pour celles codées par un réel entre 0 (exclu) et 0,5.

2. a. f_2 est une fonction dérivable car composée de fonctions dérivables, donc g l'est aussi et :

$$g'(x) = f_2'(x) - 1 = \frac{e-1}{1+(e-1)x} - 1 = \frac{e-1-1-(e-1)x}{1+(e-1)x} = \frac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}.$$

- b. Comme $e > 1$, le dénominateur est positif comme somme de termes positifs ; le signe de $g'(x)$ est donc celui de son numérateur ; or

$$e-2-(e-1)x \geq 0 \iff e-2 \geq (e-1)x \iff \frac{e-2}{e-1} \geq x$$

On a $\frac{e-2}{e-1} \approx 0,418$.

On a donc avec $\frac{e-2}{e-1} = a$,

$$g'(x) \geq 0 \iff x \leq a \text{ et de même}$$

$$g'(x) \leq 0 \iff x \geq a.$$

La fonction g est donc croissante sur $[0; a]$, puis décroissante sur $[a; 1]$.

g a donc un maximum $g(a) \approx 0,12$.

- c. D'après la question précédente sur l'intervalle $[0; a]$ la fonction g est continue et croissante de $g(0) = 0$ à $g(a) \approx 0,12$.

Comme $0,05 \in [0; a]$, il existe une valeur unique α de $[0; a]$ telle que $f(\alpha) = 0,05$.

On démontre de même (avec g décroissante) que sur $[a; 1]$ il existe un réel unique β tel que $g(\beta) = 0,05$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.