

Stage de révision

Spécialité : mathématiques

Thème : logarithme, théorème des valeurs intermédiaires (TVI) et limites

Exercice 1 (extrait) Nouvelle Calédonie Mars 2014

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x).$$

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
3. Déterminer les variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

Exercice 2 (extrait) Asie Juin 2014 (ES)

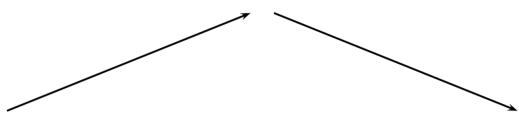
On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f , le nombre de malades durant l'épidémie. Cette fonction f est définie sur $[1 ; 26]$ par :

$$f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1 ; 26]$, $f'(t) = 24 \ln(t) - 6t + 24$.
2. Les variations de la fonction f' sont données dans le tableau suivant :

t	1	4	26
$f'(t)$			

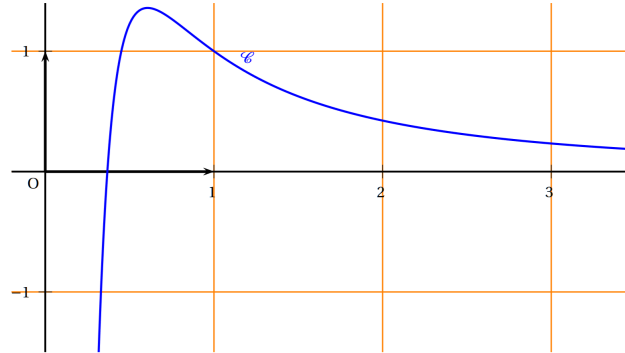
- (a) Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1 ; 26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.
- (b) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1 ; 26]$ et les variations de f sur $[1 ; 26]$.
3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.
 - (a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur $[4 ; 26]$, f' est décroissante. »
 - (b) À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Exercice 3 (extrait) Amérique du nord Mai 2013

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



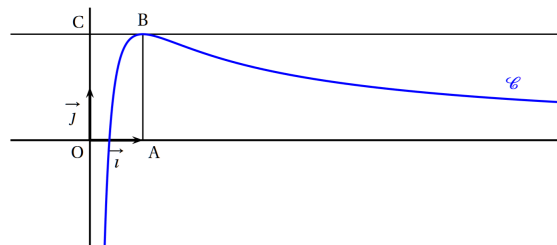
1. (a) Étudier la limite de f en 0.
- (b) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
- (c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln(x)}{x^3}.$$

- (b) Résoudre sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2 \ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f .
3. (a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
- (b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Exercice 4 (extrait) Métropole Juin 2013

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.



On dispose des informations suivantes :

- les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$;
- la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B ;
- il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x ,

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x}.$$

1. (a) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
- (b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x , $f'(x) = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$.

- (c) En déduire les réels a et b .
2. (a) Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.
 (b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x) = \frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x}$.
 (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f .
3. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0, 1]$.
 (b) Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$.
 Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n + 1$.

Exercice 5 pour les plus motivés Centre étrangers Juin 2014

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0 ; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée

$0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x.$$

- (a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
 (b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné en annexe, à rendre avec la copie, en faisant apparaître les pointillés utiles.
 Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x].$$

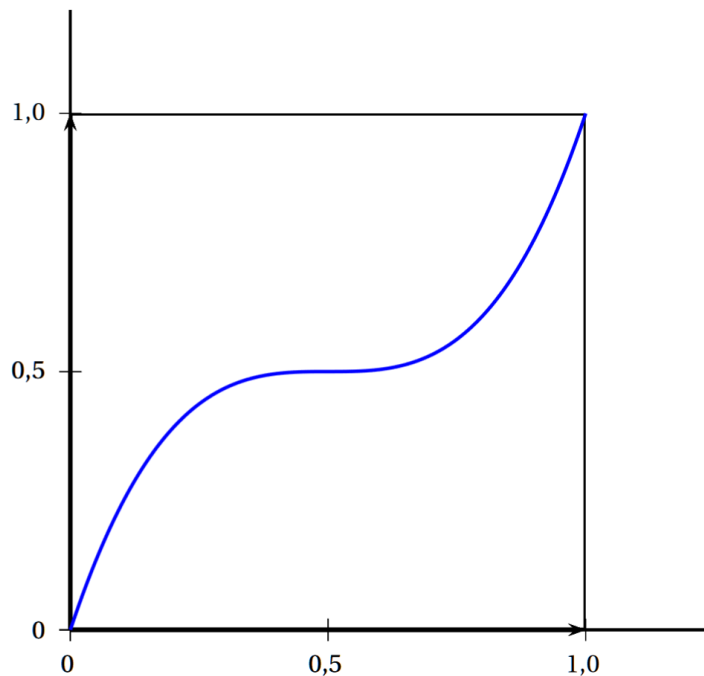
On admet que f_2 est une fonction de retouche.

On définit sur l'intervalle $[0 ; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

- (a) Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$: $g'(x) = \frac{(e - 2) - (e - 1)x}{1 + (e - 1)x}$;

- (b) Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; 1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$, maximum dont une valeur arrondie au centième est 0,12.
- (c) Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0; 1]$ deux solutions α et β , avec $\alpha < \beta$.
On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.

Courbe représentative de la fonction f_1



Ces dernières pages sont destinées à recueillir tout les éléments du cours dont vous aurez besoin pour vos révisions.