

Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

1. $e^{1-x} = e \times e^{-x} = \frac{e}{e^x}$ donc $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1-x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty$ (par composition).

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{1-x} = -\infty \text{ (par produit); } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e \frac{x}{e^x} = 0$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ce qui veut dire que la courbe représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x(-1) e^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$

5. Pour tout réel x , $e^{1-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $1-x$.

$f(1) = 1e^0 = 1$, d'où le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	-	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘	
			1		0

Exercice n°2

1. (a) • Les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0; f(0))$ soit $(0; 2)$.
 • Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On applique la règle du produit nul en sachant que $e^{-x} \neq 0$:

$$f(x) = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2.$$

Le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(-2; 0)$.

- (b) **Remarque :** la fonction $(x \mapsto e^{-x})$ peut être considérée comme une fonction composée $x \mapsto -x$ suivie de l'exponentielle

ou bien comme un quotient $\left(e^{-x} = \frac{1}{e^x}\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) = -\infty \end{array} \right\} \text{ par produit } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

La même stratégie menée en $+\infty$ conduit à la forme indéterminée

« $+\infty \times 0$ » car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$. Mais, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ théorème de croissance comparée} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \text{ par somme } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

L'axe des abscisses est donc asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

- (c) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = e^{-x} - (x + 2)e^{-x} = -(x + 1)e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0$, $f'(x)$ est donc du signe de $-(x + 1)$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $-$	
$f(x)$	$-\infty$	e	0

Exercice n°3

Partie A

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc, par opérations $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x + e^x$. Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, donc, par opérations $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
2. Pour tout réel x , $f'(x) = 1e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.
3. Pour tout réel x , $e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0
f	0	$-1/e^2$	$+\infty$

Partie B

1. a. On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
 g_m(x) = 0 &\iff x+1 - me^{-x} = 0 \\
 &\iff x+1 = me^{-x} \\
 &\iff (x+1)e^x = m \\
 &\iff f(x) = m.
 \end{aligned}$$

- b. D'après l'équivalence et le tableau de variations précédent :

- si $m < -\frac{1}{e^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ ne possède aucune solution, donc $\mathcal{C}_m$ ne coupe pas l'axe des abscisses;
 - si $m = -\frac{1}{e^2}$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point;
 - si $-\frac{1}{e^2} < m < 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède deux solutions, donc $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en deux points;
 - si $m \geq 0$: l'équation $g_m(x) = 0$ possède une solution, donc $\mathcal{C}_m$ coupe l'axe des abscisses en un point.
2. • La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\frac{1}{e^2}$. La seule possibilité est donc que $m = -e$.
 - La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m = -\frac{1}{e^2}$ ou $m = 0$. La seule possibilité est donc $m = 0$.
 - Par élimination, la courbe 3 correspond à $m = e$.
3. Pour tout réel x , $g_m(x) - (x+1) = -me^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :
 - si $m > 0$, alors pour tout réel x , $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathcal{C}_m$ est en dessous de $\mathcal{D}$;
 - si $m < 0$, alors pour tout réel x , $g_m(x) - (x+1) > 0$, donc $\mathcal{C}_m$ est au dessus de $\mathcal{D}$;
 - si $m = 0$, alors pour tout réel x , $g_m(x) - (x+1) = 0$, donc $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{D}$ sont confondues.

Exercice n°4

1. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty$.

$$f_1(x) = \frac{x}{e^x}. \text{ On sait que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0.$$

Donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_1$ en $+\infty$.

2. f_1 produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

Comme $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, le signe de $f_1'(x)$ est celui de $1-x$.

Donc $f_1'(x) > 0$ si $x < 1$ et $f_1'(x) < 0$ si $x > 1$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	e^{-1}	0

3. $g_1(x) = -(x+1)e^{-x}$

g_1 étant dérivable, on a pour tout réel,

$$g_1'(x) = -1e^{-x} - 1 \times [-(x+1)e^{-x}] = -e^{-x} + (x+1)e^{-x} = xe^{-x} = f_1(x).$$

Donc g_1 est bien une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. Comme pour tout réel x , $e^x > 0$, $f_1(x) = 0 \iff x = 0$.

Le tableau de variations ci-dessus montre donc que $f_1(x) < 0$ sur $]-\infty; 0[$ et $f_1(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

1. De façon évidente $f_k(0) = k \times 0 \times e^0 = 0$, donc les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par l'origine.

2. a. Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f_k l'est aussi et :

$$f_k'(x) = ke^{-kx} - k \times kxe^{-kx} = ke^{-kx}(1-kx).$$

- b. k strictement positif, et $e^{-kx} > 0$, pour tout réel x , donc le signe de la dérivée $f_k'(x)$ est celui de $1-kx$.

$$\text{Or } 1-kx < 0 \iff \frac{1}{k} < x; \quad 1-kx > 0 \iff \frac{1}{k} > x; \quad 1-kx = 0 \iff \frac{1}{k} = x.$$

Il en résulte que la fonction f_k est :

$$\text{croissante sur } \left] -\infty; \frac{1}{k} \right[, \text{ et décroissante sur } \left] \frac{1}{k}; +\infty \right[;$$

elle admet donc un maximum en $\frac{1}{k}$:

$$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = k \times \frac{1}{k} \times e^{-k \times \frac{1}{k}} = 1e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368.$$

Conclusion : toutes les fonctions ont le même maximum e^{-1} pour $x = \frac{1}{k}$.

- c. Le maximum pour $k = 2$ est obtenu pour $x = \frac{1}{2} = 0,5$, donc le maximum pour f_a est obtenue pour une valeur $\frac{1}{a}$ inférieure à 0,5 donc $a > 2$.

Note : en fait on peut penser que l'abscisse du minimum est à peu près égale à 0,1, ce qui correspond à $a = 10$.

- d. Une équation de cette tangente est :

$$y = f_k'(0)(x-0) + f_k(0) \iff y = k(1-0)e^0 x + 0 \iff y = kx.$$

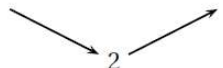
- e. Le coefficient directeur de la droite (T) est égal à $\frac{0,6}{0,2} = 3$.

Donc la courbe $\mathcal{C}_b$ correspond à la valeur $b = 3$.

Exercice n°5

Partie A

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel x : $g'(x) = -1 + e^x$. On a alors $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$. Le tableau de variations de g est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g			

On déduit du tableau précédent que, pour tout réel x , $g(x) \geq 2 > 0$.

2. **Étude en $-\infty$.**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty$ donc, par somme : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Étude en $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et, par croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, donc, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Pour tout réel x , on a :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 + \frac{1e^x - xe^x}{(e^x)^2} \\
 &= 1 + \frac{e^x(1-x)}{e^x \times e^x} \\
 &= 1 + \frac{1-x}{e^x} \\
 &= \frac{e^x + 1 - x}{e^x} \\
 &= e^{-x} g(x).
 \end{aligned}$$

4. On a vu plus haut que, pour tout réel x , $g(x) > 0$, et comme par ailleurs $e^{-x} > 0$, on en déduit que $f'(x) > 0$. On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$	$+\infty$

5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'intervalle $\mathbb{R}$ a pour image $\mathbb{R}$, ce dernier intervalle contenant 0, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ possède dans $\mathbb{R}$ une solution α unique.

Par ailleurs, $f(-1) = -e^{-1} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$, donc : $-1 < \alpha < 0$.

6. a. La tangente T a pour équation réduite :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow y = 2x + 1.$$

- b. Posons, pour tout réel x , $k(x) = f(x) - (2x + 1)$, alors :

$$\begin{aligned}
 k(x) &= x + 1 + \frac{x}{e^x} - (2x + 1) \\
 &= \frac{x}{e^x} - x \\
 &= \frac{x}{e^x} (1 - e^x).
 \end{aligned}$$

Dressons alors un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
$1 - e^x$	$+$	0	$-$
$k(x)$	$-$	0	$-$

On en déduit que $\mathcal{C}$ est située en dessous de T .

Exercice n°6

Partie A

Voir la figure.

Partie B

1. a. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égal à $f'(a)$. Or $f'(x) = e^x$, donc $f'(a) = e^a$.
 b. De même le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égal à $g'(b)$. Or $g'(x) = -(-e^{-x})$, donc $g'(b) = e^{-b}$.
 c. Si les deux tangentes sont égales le coefficient directeur de leurs équations réduites sont égaux, soit :
 $f'(a) = g'(b) \iff e^a = e^{-b}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien :
 $a = -b \iff b = -a$.

2. Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égale à :

$$y - e^a = e^a(x - a) \iff y = xe^a + e^a(1 - a).$$

Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égale à :

$$y - (1 - e^{-b}) = e^{-b}(x - b) \iff y = xe^{-b} + 1 - e^{-b} - be^{-b}.$$

Ou en remplaçant $-b$ par a :

$$y = xe^a + 1 - e^a + ae^a \iff y = xe^a + 1 + e^a(a - 1).$$

Si les deux tangentes sont égales, leurs équations réduites sont les mêmes. On a déjà vu l'égalité des coefficients directeurs. Les ordonnées à l'origine sont aussi les mêmes soit :

$$e^a(1 - a) = 1 + e^a(a - 1) \iff e^a(2 - 2a) = 1 \iff 2(a - 1)e^a + 1 = 0.$$

Donc a est solution de l'équation dans $\mathbb{R}$:

$$2(x - 1)e^x + 1 = 0.$$

1. a. Sur $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2xe^x - e^x + 1$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, d'où par somme de limite :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 1.$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de φ .

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

- b. Somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\varphi'(x) = 2e^x + 2(x - 1)e^x = 2xe^x.$$

Comme, quel que soit $x \in \mathbb{R}$; $e^x > 0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x . Donc sur $]-\infty; 0]$,

$\varphi'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle et sur $]0; +\infty[$, $\varphi'(x) > 0$: la fonction φ est croissante sur cet intervalle. D'où le tableau de variations :

c.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	-1	$+\infty$

2. a. Sur $]-\infty; 0]$ la fonction φ est continue et strictement décroissante à valeurs dans $[-1; 1]$.

Comme $0 \in [-1; 1]$ il existe un réel unique α de $]-\infty; 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Le même raisonnement sur l'intervalle $[0; +\infty[$ montre qu'il existe un réel unique de cet intervalle β tel que $f(\beta) = 0$.

Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b. La calculatrice donne successivement :

$\varphi(-2) \approx 0,18$ et $\varphi(-1) \approx -0,47$, donc $-2 < \alpha < -1$;

$\varphi(-1,7) \approx 0,013$ et $\varphi(-1,6) \approx -0,05$, donc $-1,7 < \alpha < -1,6$;

$\varphi(-1,68) \approx 0,001$ et $\varphi(-1,67) \approx -0,005$, donc $-1,68 < \alpha < -1,67$;

$\varphi(-1,679) \approx 0,00041$ et $\varphi(-1,678) \approx -0,0002$, donc $-1,679 < \alpha < -1,678$.

Conclusion au centième près $\alpha \approx -1,68$.

De la même façon on obtient $\beta \approx 0,77$.

Partie D

1. Le coefficient directeur de la tangente en E à $\mathcal{C}_f$ est e^α .

Le coefficient directeur de la droite (EF) est : $\frac{1 - e^\alpha - e^\alpha}{-\alpha - \alpha} = \frac{1 - 2e^\alpha}{-2\alpha}$.

Or α est solution de l'équation : $2(x-1)e^x + 1 = 0$, autrement dit

$2(\alpha-1)e^\alpha + 1 = 0 \iff 2\alpha e^\alpha = 2e^\alpha - 1$, d'où en revenant au coefficient directeur de la droite (EF) : $\frac{1 - 2e^\alpha}{-2\alpha} = \frac{-2\alpha e^\alpha}{-2\alpha} = e^\alpha$

Conclusion : la droite (EF) est bien la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$ est $e^{-(-\alpha)} = e^\alpha$.

On a vu dans la question précédente que la droite (EF) a pour coefficient directeur e^α et contient le point E

Conclusion la droite (EF) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $-\alpha$.