

Stage de révision

Spécialité : mathématiques

Thème : exponentielle, théorème des valeurs intermédiaires (TVI) et limites

Exercice 1(extrait)Amérique du sud novembre 2013

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{1-x}.$$

1. Vérifier que pour tout réel x , $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f .
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Exercice 2(extrait)Polynésie Juin 2013

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.
2. Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe $\mathcal{C}$.
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3Antilles Guyane Juin 2013

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)e^x.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = (x+2)e^x$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

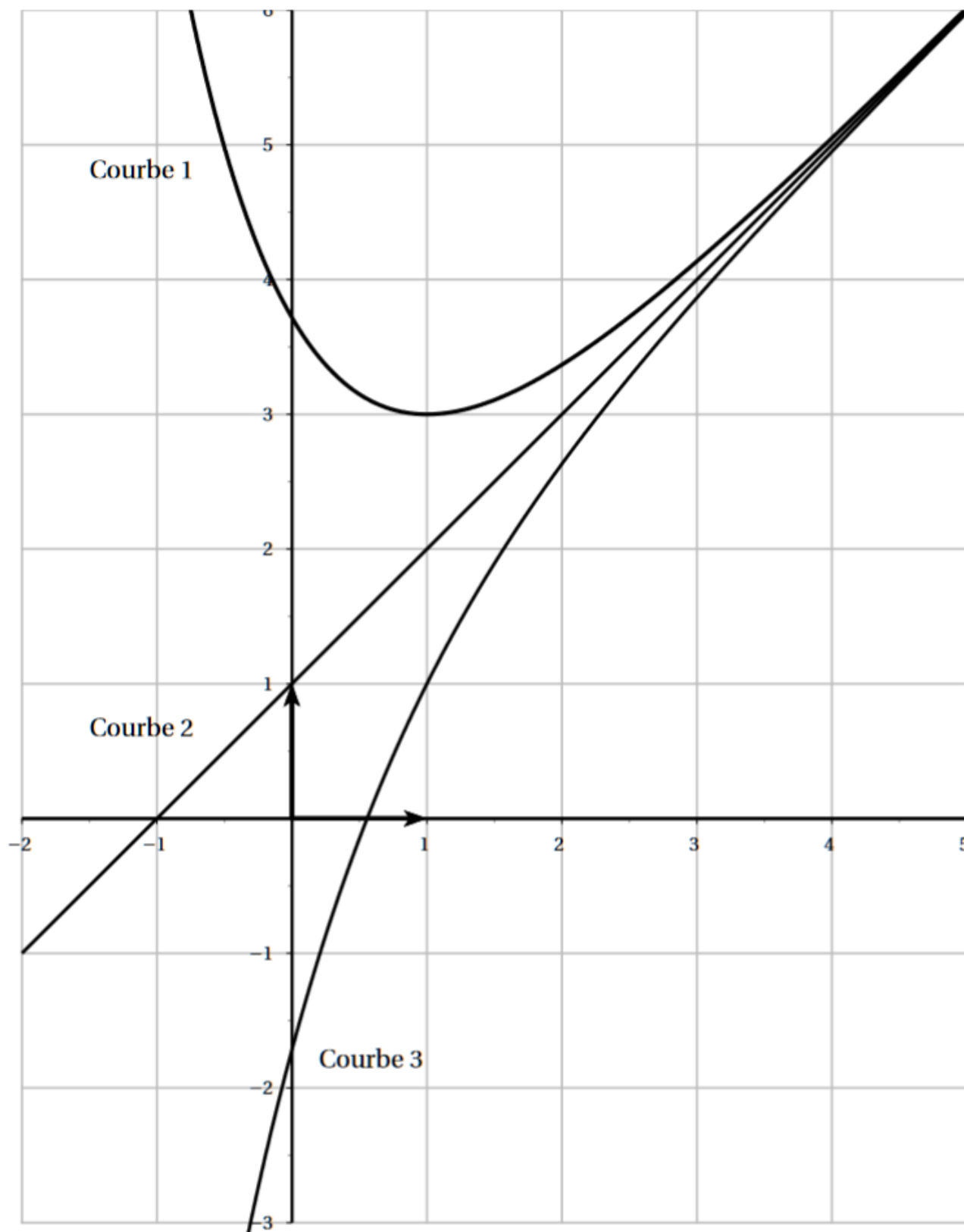
Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.
(b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .
2. On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_e$, et $\mathcal{C}_{-e}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$).
Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m .



Exercice 4 Antilles Guyane septembre 2013

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kxe^{-kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = xe^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

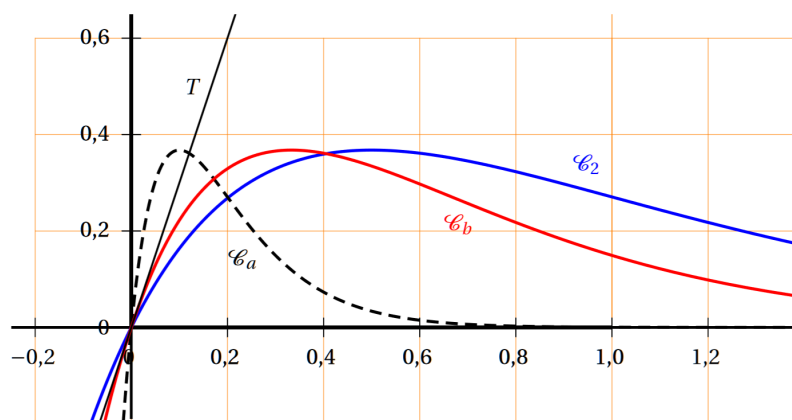
$$g_1(x) = -(x+1)e^{-x}$$

est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .
5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}_1$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.
2. (a) Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f'_k(x) = k(1 - kx)e^{-kx}.$$

- (b) Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.
- (c) En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.
- (d) Écrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.
- (e) En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b .

Exercice 5 (extrait) Antilles Guyane Juin 2014

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + e^x.$$

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (limites de g aux bornes de son ensemble de définition comprises).

En déduire le signe de $g(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tout réel x ,

$$f'(x) = e^{-x}g(x).$$

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.
6. (a) Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
(b) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T .

Exercice 6 pour les plus motivés Asie Juin 2013

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - e^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b .

1. (a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.
 (b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.
 (c) En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation

$$2(x - 1)e^x + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = 2(x - 1)e^x + 1.$$

1. (a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
 (b) Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.
 (c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. (a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
 (b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
 À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse α et F le point de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $-\alpha$ (α est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point E.
2. Démontrer que (EF) est tangente à $\mathcal{C}_g$ au point F.

Ces dernières pages sont destinées à recueillir tout les éléments du cours dont vous aurez besoin pour vos révisions.

