

Exercice n°1

Question 1 :

Réponse d

Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est le vecteur $\vec{d}(1, 2, 3)$, un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est le vecteur $\vec{d}'(1, 1, -1)$. $\vec{d} \cdot \vec{d}' = 1 + 2 - 3 = 0$.

Ces deux vecteurs sont orthogonaux, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc orthogonales.

Aussi par élimination : la a. est fausse car les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, b. est fausse car il n'y a pas de point d'intersection et c. est fausse car C n'est pas sur D.

Question 2 :

Réponse c

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est le vecteur $\vec{n}(1, 1, -1)$.

Ce vecteur est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$.

Ce qui entraîne que ce plan est orthogonal à la droite $\mathcal{D}'$.

Question 3 :

Réponse c

$$AB = \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}, \quad AC = \sqrt{16 + 36 + 4} = \sqrt{56}, \quad BC = \sqrt{36 + 4 + 16} = \sqrt{56}.$$

Ces trois distances sont égales, il en résulte que le triangle ABC est équilatéral.

Question 4 :

Réponse b

Pour déterminer lequel de ces vecteurs est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$, il suffit de vérifier si ces vecteurs sont orthogonaux à deux vecteurs de $\mathcal{P}'$ qui sont non colinéaires.

Prenons $\vec{d}'(1, 1, -1)$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AD'}$, où A(1, -1, 2) et D' est un point de $\mathcal{D}'$, par exemple celui de coordonnées (1, 3, 4), soit $\overrightarrow{AD'}(0, 4, 2)$.

On vérifie que $\vec{d}'$ et $\overrightarrow{AD'}$ ne sont pas colinéaires, et on constate que, dans le second cas :

$$\vec{d}' \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AD'} \cdot \vec{n} = 0$$

Ce qui signifie que le vecteur $\vec{n}(3, -1, 2)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$.

Exercice n°2

Affirmation 1

Un vecteur normal au plan P a pour coordonnées $(2; 1; -2)$.

Un vecteur normal au plan dont une équation est $2x + y + 2z - 24 = 0$ a pour coordonnées $(2; 1; 2)$: ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles.

Affirmation fausse.

Affirmation 2

Pour $t = -1$ on trouve les coordonnées de A et pour $t = 3$ celles de C.

Affirmation vraie.

Affirmation 3

La droite (DE) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DE}(5; -4; 3)$ et on a vu que $\vec{u}(2; 1; -2)$ est un vecteur normal au plan P .

Or $\vec{u} \cdot \overrightarrow{DE} = 10 - 4 - 6 = 0$, donc la droite (DE) est parallèle au plan P . Comme les coordonnées de E ne vérifient pas l'équation de P ($4 + 7 + 12 - 5 = 0$ est une égalité fausse, la droite (DE) est strictement parallèle au plan (P).

Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -12 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$.

D'où $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} = -60 + 60 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux;

$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC} = -60 + 60 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc le vecteur $\overrightarrow{DE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC), il est donc orthogonal à ce plan.

Affirmation vraie.

Exercice n°3

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B(1 ; 3 ; 0), C(2 ; -1 ; -2) et D (7 ; -1 ; 4).

1. Démontrons que les points A, B et C ne sont pas alignés.

On a $\overrightarrow{AB}(1 ; -1 ; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(2 ; -5 ; -3)$. On a : $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-5}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires : les points ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$.

- a. Démontrons que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + (-1) \times 3 = 0$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 2 \times 2 + (-5) \times (-1) + (-3) \times 3 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux à $\vec{u}$.

La droite Δ est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : elle est orthogonale au plan (ABC).

- b. De ce qui précède, on déduit que $\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC).

Une équation cartésienne de (ABC) est de la forme $2x - y + 3z + d = 0$.

Comme le point A appartient au plan (ABC), ses coordonnées vérifient :

$$2 \times 0 + (4) \times (-1) + (1) \times 3 + d = 0 \iff d = 1.$$

On en déduit une équation cartésienne du plan (ABC) : $2x - y + 3z + 1 = 0$.

- c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite Δ .

Comme la droite Δ a pour vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$ et contient le point D (7 ; -1 ; 4), une représentation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- d. Déterminons les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

Les coordonnées de H sont les solutions du système :

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \\ 2x - y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \\ 2(2t + 7) - (-t - 1) + 3(3t + 4) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 2t + 7 \\ y = -t - 1 \\ z = 3t + 4 \\ t = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = -2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Le point H a pour coordonnées H(3 ; 1 ; -2)

3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

- a. Démontrons que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

Le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + y + z = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_1(1 ; 1 ; 1)$.

Le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $x + 4y + 2 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n}_2(1 ; 4 ; 0)$.

Les coordonnées des vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires. Les plans ne sont pas parallèles ; ils sont sécants.

- b. Vérifions que la droite d , intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Considérons le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \\ y = y \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 4y + 2 = 0 \\ y = t \end{cases} \iff \begin{cases} z = -x - t \\ x = -4t - 2 \\ y = t \end{cases} \iff \begin{cases} z = 3t + 2 \\ x = -4t - 2 \\ y = t \end{cases}$$

On en déduit que la droite d , intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

On peut également vérifier que la droite (d) est incluse dans le plan $\mathcal{P}_1$ et également dans le plan $\mathcal{P}_2$.

En effet, on a démontré que ces deux plans étaient sécants, ils sont donc sécants suivant une droite qui appartient simultanément aux deux plans et cette droite est unique.

$-4t - 2 + t + 3t + 2 = 0$ donc (d) est contenue dans le plan $\mathcal{P}_1$;

$-4t - 2 + 4t + 2 = 0$ donc (d) est contenue dans le plan $\mathcal{P}_2$

- c. On déduit de la représentation paramétrique précédente que la droite d a pour vecteur directeur $\vec{u}'(-4; 1; 3)$.

Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{u}(2; -1; 3)$.

$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$. $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont orthogonaux : la droite d et le plan (ABC) sont parallèles.

Exercice n°4.

1. Dans le repère donné, A a pour coordonnées (0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0) et E(0, 0, 1).

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ donc le point F a pour coordonnées (1, 0, 1).

La droite (FD) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{DF}$ de coordonnées (1, -1, 1); de plus elle passe par le point D(0, 1, 0).

La droite (FD) a pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (1, -1, 1). Ce vecteur est un vecteur normal au plan (BGE) s'il est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EG}$ directeurs du plan (BGE).

$\overrightarrow{EB}$ a pour coordonnées (1, 0, -1); $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = 1 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times (-1) = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{EB}$.

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées (1, 1, 0); $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 1 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{EG}$.

Donc le vecteur $\vec{n}$ (1, -1, 1) est normal au plan (BGE).

Le plan (BGE) a pour vecteur normal $\vec{n}$ et passe par le point B; c'est l'ensemble des points M(x, y, z) tels que $\vec{n} \perp \overrightarrow{BM}$.

$\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées (x-1, y, z);

$\vec{n} \perp \overrightarrow{BM} \iff 1 \times (x-1) + (-1) \times y + 1 \times z = 0 \iff x - y + z - 1 = 0$.

L'équation cartésienne du plan (BGE) est $x - y + z - 1 = 0$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est égal au vecteur $\vec{n}$ qui est normal au plan (BGE) donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).

Les coordonnées (x, y, z) du point d'intersection de la droite (FD) et du plan (BGE) sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ t - (1 - t) + t - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \\ 3t = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) au point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

4. Les segments [BE], [EG] et [BG] sont tous les trois des diagonales de carrés de côtés 1; donc BE = EG = BG = $\sqrt{2}$. Le triangle BEG est équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

Soit H le milieu de [EG]; ce point est aussi le pied de la hauteur issue de B dans le triangle équilatéral BEG de côté $a = \sqrt{2}$.

Dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (relations dans un triangle rectangle); donc dans le triangle équilatéral BEG, la hauteur BH = $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire du triangle BEG vaut $\frac{EG \times BH}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Le volume d'un tétraèdre est $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

D'après les questions précédentes, le volume du tétraèdre BEGD est $\frac{\text{aire(BEG)} \times KD}{3}$.

Dans le repère orthonormé (A; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$) :

$$KD^2 = (x_D - x_K)^2 + (y_D - y_K)^2 + (z_D - z_K)^2 = \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} \text{ donc}$$

$$KD = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Le volume du tétraèdre est donc : $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{3}$.

Exercice n°5.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées : A $(1; -\sqrt{3}; 0)$; B $(1; \sqrt{3}; 0)$; C $(-2; 0; 0)$; D $(0; 0; 2\sqrt{2})$

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(0; 2\sqrt{3}; 0)$; le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(-1; \sqrt{3}; 2\sqrt{2})$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les trois points A, B, D définissent un plan.

La relation $4x + z\sqrt{2} = 4$ est de la forme $ax + by + cz = d$, c'est donc une équation d'un plan $\mathcal{P}$.

- $4x_A + z_A\sqrt{2} = 4 \times 1 = 4$ donc $A \in \mathcal{P}$
- $4x_B + z_B\sqrt{2} = 4 \times 1 = 4$ donc $B \in \mathcal{P}$
- $4x_D + z_D\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$ donc $D \in \mathcal{P}$

Donc $\mathcal{P}$ est le plan (ABD) qui a pour équation $4x + z\sqrt{2} = 4$.

2. On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

- a. En prenant $t = 0$, on trouve $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ donc le point O appartient à $\mathcal{D}$.

La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 0; \sqrt{2})$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(2; 0; 2\sqrt{2})$ donc $\overrightarrow{CD} = 2\vec{u}$ ce qui entraîne que la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à (CD).

- b. Le point G d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD) a des coordonnées $(x; y; z)$ qui vérifient :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \\ 4x + z\sqrt{2} = 4 \end{cases}$$

Donc $4t + t\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \iff 6t = 4 \iff t = \frac{2}{3}$. Le point G a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

3. a. On note L le milieu du segment [AC];

L a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}; \frac{z_A + z_C}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

Le vecteur $\overrightarrow{BL}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; le vecteur $\overrightarrow{BO}$ a pour coordonnées $(-1; -\sqrt{3}; 0)$.

Donc $\frac{2}{3}\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BO}$; les vecteurs $\overrightarrow{BL}$ et $\overrightarrow{BO}$ sont colinéaires donc les points B, O et L sont alignés.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-3; \sqrt{3}; 0)$.

On calcule le produit scalaire de $\overrightarrow{BL}$ et de $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{BL} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2} \times (-3) + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt{3} + 0 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0 \text{ donc les vecteurs } \overrightarrow{BL} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont orthogonaux.}$$

On peut donc dire que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

- b. La droite (BL) passe par le milieu de [AC] et est perpendiculaire à (AC) donc c'est la médiatrice de [AC], donc BA = BC.

- $BA^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = (-2\sqrt{3})^2 = 12$
- $CA^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = (1+2)^2 + (-\sqrt{3})^2 = 9+3 = 12$

Donc $BA^2 = CA^2$ donc $BA = CA$.

On peut en déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Donc le centre de son cercle circonscrit est aussi son centre de gravité; il est situé aux $\frac{2}{3}$ d'une médiane en partant du sommet.

Or on a vu que $\frac{2}{3}\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BO}$ donc on peut en déduire que le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

4. On a déjà vu que $AB = AC = BC = \sqrt{12}$; on calcule les longueurs des autres arêtes du tétraèdre :

- $DA^2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 1+3+8 = 12$
- $DB^2 = (-1)^2 + (-\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 1+3+8 = 12$
- $DC^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4+8 = 12$

Donc les six arêtes du tétraèdre ABCD ont la même longueur, donc le tétraèdre ABCD est régulier.