

Stage de révision

Spécialité : mathématiques

Thème : géométrie dans l'espace

Exercice 1 Liban mai 2013

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.

Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A(1 ; -1 ; 2), B(3 ; 3 ; 8), C(-3 ; 5 ; 4) et D(1 ; 2 ; 3).

On note $\mathcal{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et $\mathcal{D}'$ la droite ayant pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = k + 1 \\ y = k + 3 \\ z = -k + 4 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y - z + 2 = 0$.

Question 1 :

Proposition a. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

Proposition b. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

Proposition c. Le point C appartient à la droite $\mathcal{D}$.

Proposition d. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales.

Question 2 :

Proposition a. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}'$.

Proposition b. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}'$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.

Proposition c. Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathcal{D}'$.

Proposition d. Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Question 3 :

Proposition a. Les points A, D et C sont alignés.

Proposition b. Le triangle ABC est rectangle en A.

Proposition c. Le triangle ABC est équilatéral.

Proposition d. Le point D est le milieu du segment [AB].

Question 4 :

On note $\mathcal{P}'$ le plan contenant la droite $\mathcal{D}'$ et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :

Proposition a. $\vec{n}(-1 ; 5 ; 4)$

Proposition b. $\vec{n}(3 ; -1 ; 2)$

Proposition c. $\vec{n}(1 ; 2 ; 3)$

Proposition d. $\vec{n}(1 ; 1 ; -1)$

Exercice 2 Centre étrangers Juin 2013

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère

- les points A (12 ; 0 ; 0), B (0 ; -15 ; 0), C (0 ; 0 ; 20), D (2 ; 7 ; -6), E (7 ; 3 ; -3);
- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$

Affirmation 1

Une équation cartésienne du plan parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le point A est :

$$2x + y + 2z - 24 = 0$$

Affirmation 2

Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :
$$\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3

La droite (DE) et le plan $\mathcal{P}$ ont au moins un point commun.

Affirmation 4

La droite (DE) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 3 Amérique du nord mai 2013

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; -1 ; -2) et D (7 ; -1 ; 4).

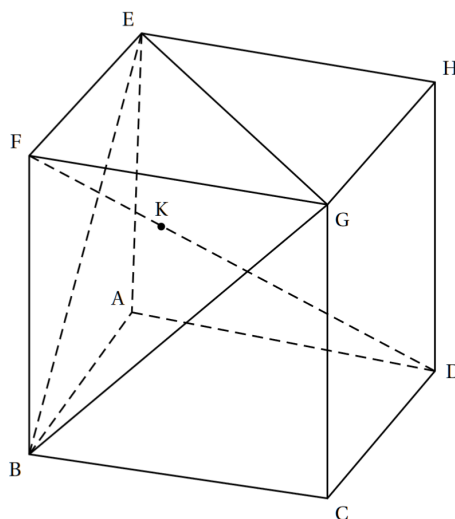
1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$.
 - (a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
 - (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
 - (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
 - (d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
 - (a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
 - (b) Vérifier que la droite d , intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- (c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 4 Amérique du sud novembre 2013

On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD) .
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE) .
3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $K(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3})$.
4. Quelle est la nature du triangle BEG ? Déterminer son aire.
5. En déduire le volume du tétraèdre $BEGD$.

Exercice 5 pour les plus motivés Métropole Juin 2014

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathcal{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
On note H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (DF).
 - (a) Donner les coordonnées des points D et F.
 - (b) Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
 - (c) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
 - (d) Calculer les coordonnées du point H.
 - (e) Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.
 - (a) Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.
 - (b) Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
En déduire que $ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
 - (c) Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
 - (d) Conclure.

Ces dernières pages sont destinées à recueillir tout les éléments du cours dont vous aurez besoin pour vos révisions.

