

Exercice n°1

5. On admet que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}$.

La fonction f est convexe sur les intervalles sur lesquels f'' est positive.

Sur $]0 ; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc

$$f''(x) \geq 0 \iff \frac{1+2\ln(x)}{x^3} \geq 0 \iff 1+2\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \geq -\frac{1}{2} \iff x \geq e^{-\frac{1}{2}}$$

Donc le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe est $\left[e^{-\frac{1}{2}} ; +\infty \right[$.

Exercice n°2

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

$$f'(x) = 1 + 0 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$$

4. Pour étudier la convexité de f , on détermine le signe de f'' , la dérivée seconde de f .

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2} \text{ donc}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4) \times x^2 - (x^2 - 4x + 3) \times 2x}{x^4} = \frac{(2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 6) \times x}{x^4} = \frac{4x - 6}{x^3}$$

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4x-6$		0	+
x^3	0	+	+
$f''(x)$		0	+
		f concave	f convexe

La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \frac{3}{2}$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{3}{2}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + 4 - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

La courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{3}{2} ; \frac{7}{2} - 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

Exercice n°3

6. f' étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et sur cet intervalle :

$$f''(x) = \frac{-4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-4 \ln x)}{x^4} = \frac{-4x + 8x \ln x}{x^4} = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}.$$

7. La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :

$$f''(x) = 0 \iff \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3} = 0 \iff -4 + 8 \ln x = 0 \iff -1 + 2 \ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} \approx 1,649 \text{ (ou } \sqrt{e}).$$

L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\sqrt{e}} \approx 3,639$.

Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.

Exercice n°4

3. On voit sur la figure que $f''(-3) = f''(2) = f''(5) = 0$: la dérivée seconde s'annule trois fois donc la fonction f admet trois points d'inflexion. Réponse B.

Exercice n°5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 5]$ par $f(x) = (3 - x)e^x + 1$.

1. $f'(x) = (-1)e^x + (3 - x)e^x = (2 - x)e^x$
 $f''(x) = (-1)e^x + (2 - x)e^x = (1 - x)e^x$
2. On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[2 ; 5]$; pour tout x , $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
Sur $[2 ; 5]$, $2 - x < 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur $[2 ; 5]$.
3. La fonction f est strictement décroissante sur $[2 ; 5]$.
De plus : $f(2) = (3 - 2)e^2 + 1 = e^2 + 1 \approx 8,4 > 0$ et $f(5) = (3 - 5)e^5 + 1 = -2e^5 + 1 \approx -296 < 0$.
Or $0 \in [f(5) ; f(2)]$ donc, d'après la propriété des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[2 ; 5]$.
Comme $f(3) = (3 - 3)e^3 + 1 = 1 > 0$ et $f(4) = (3 - 4)e^4 + 1 = -e^4 + 1 \approx -53,6 < 0$, on peut dire que : $3 < \alpha < 4$.
4. a. Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
La droite T a pour équation $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$;
or $f'(x) = (2 - x)e^x$ donc $f'(3) = (2 - 3)e^3 = -e^3$ et $f(3) = 1$.
Donc l'équation de T est : $y = -e^3(x - 3) + 1$ soit $y = -e^3x + 3e^3 + 1$.
b. Le point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses a pour ordonnée 0 et pour abscisse la solution de l'équation $-e^3x + 3e^3 + 1 = 0$.
 $-e^3x + 3e^3 + 1 = 0 \iff 3e^3 + 1 = e^3x \iff \frac{3e^3 + 1}{e^3} = x \iff x = 3 + e^{-3}$
Le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses a pour coordonnées $(3 + e^{-3}; 0)$.

c. $f''(x) = (1-x)e^x$ est du signe de $1-x$ car $e^x > 0$ pour tout x .

Sur $[2;5]$, $1-x < 0$ donc $f''(x) < 0$ donc f est concave.

d. Sur $[2;5]$, la fonction f est concave ; donc sur $[2;5]$, la courbe représentant f est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Le point d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses est donc situé à gauche du point d'intersection de la tangente T avec cet axe.

Donc l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentant f avec l'axe des abscisses (la solution de l'équation $f(x) = 0$) est inférieure à l'abscisse du point d'intersection de T avec l'axe des abscisses : $\alpha < 3 + e^{-3}$.

On a donc : $3 < \alpha < 3 + \frac{1}{e^3} < 3,05$.

Exercice n°6

1. f est dérivable et deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$.

2.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

3. $x \in]0; +\infty[$ donc $x^{\frac{3}{2}} > 0$

Ainsi $-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} < 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

Donc $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$

Ainsi f est concave sur $]0; +\infty[$
--

4. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est la droite d'équation :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Or $f(1) = \sqrt{1} = 1$ et $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

Donc l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est :

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$$

Soit :

$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

5. f étant concave sur $]0; +\infty[$ sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes, notamment de la tangente au point d'abscisse 1. Donc pour tout réel strictement positifs on a : $f(x) \leq y$ c'est-à-dire $\sqrt{x} \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$