

Exercice n°1

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout n , $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$.

1. Pour $n = 0$, $u_1 = u_{0+1} = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$.
 Pour $n = 1$, $u_2 = u_{1+1} = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{41}{16}$.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2. a. La formule, étirée ensuite vers le bas, que l'on peut écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B est :
 $= 3/4 * B2 + 1/4 * A2 + 1$.
 b. La suite (u_n) semble croissante.
3. a. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $n \leq u_n \leq n + 1$.

- **Initialisation**

Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité**

On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire : $n \leq u_n \leq n + 1$ (hypothèse de récurrence).

$$n \leq u_n \leq n + 1 \iff \frac{3}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4}(n + 1)$$

$$\iff \frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leq \frac{3}{4}(n + 1) + \frac{1}{4}n$$

$$\iff n \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leq n + \frac{3}{4}$$

$$\iff n + 1 \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \leq n + \frac{3}{4} + 1 \iff n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{7}{4}$$

donc $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$.

On a démontré que la propriété était vraie au rang $n + 1$.

- **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.

- b. D'après la question précédente :

- Pour tout n , $n \leq u_n \leq n + 1$ donc $n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$ donc

$n \leq u_n \leq n + 1 \leq u_{n+1} \leq n + 2$ d'où on tire $u_n \leq u_{n+1}$ ce qui démontre que la suite (u_n) est croissante.

- Pour tout n , $n \leq u_n$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- c. Pour tout n , $n \leq u_n \leq n + 1$ donc pour tout $n > 0$, on a : $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n + 1}{n}$ c'est-à-dire :

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$.

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Pour tout n , $v_n = u_n - n$ donc $u_n = v_n + n$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}(v_n + n) - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{4}n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}v_n$$

$$v_0 = u_0 - 0 = 1$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

b. On en déduit que, pour tout n , $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Comme $u_n = v_n + n$, on a $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice n°2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1. a. $u_1 = u_0 + v_0 = 1 + 1 = 2$ et $v_1 = 2 \times u_0 + v_0 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

b. Pour tout n , $v_{n+1} = 2u_n + v_n$ donc $v_{n+1} - v_n = 2u_n$.

On a admis que la suite (u_n) était strictement positive donc, pour tout n , $u_n > 0$; on en déduit que, pour tout n , $v_{n+1} - v_n > 0$ donc que la suite (v_n) est strictement croissante.

La suite (v_n) est strictement croissante donc, pour tout n , $v_n \geq v_0$ donc $v_n \geq 1$.

c. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \geq n + 1$.

On démontre cette propriété par récurrence.

• Initialisation

Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $n + 1 = 1$ donc $u_n \geq n + 1$; $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Hérédité

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie (hypothèse de récurrence) et on va démontrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$\mathcal{P}_n$ vraie équivaut à $u_n \geq n + 1$.

$u_{n+1} = u_n + v_n$; or $u_n \geq n + 1$ et, d'après la question 1.b, $v_n \geq 1$. On en déduit que $u_{n+1} \geq n + 2$ et donc que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

• Conclusion

La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n + 1$.

d. Pour tout n , $u_n \geq n + 1$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \frac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

a. $(-1)^{n+1}$ vaut soit -1 , soit 1 selon la parité de n ; donc $-1 \leq (-1)^{n+1} \leq 1$.

On sait que $u_n > 0$ donc $u_n^2 > 0$.

On divise par u_n^2 et on obtient : $-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$.

b. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = +\infty$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{u_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n^2} = 0$.

On sait de plus que, pour tout n : $-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$.

Donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut dire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$.

c. $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} = 0$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^2 = 2$.

On peut en déduire que la suite (r_n) converge vers $\sqrt{2}$

d. Pour tout entier naturel n ,

$$r_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{2u_n + v_n}{u_n + v_n} = \frac{u_n \left(2 + \frac{v_n}{u_n} \right)}{u_n \left(1 + \frac{v_n}{u_n} \right)} = \frac{2 + \frac{v_n}{u_n}}{1 + \frac{v_n}{u_n}} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :
    n = 0
    r = 1
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :
        r = (2+r)/(1+r)
        n = n+1
    return n
```

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.

Elle correspond à la plus petite valeur de n pour laquelle la distance entre r_n et $\sqrt{2}$ est inférieure ou égale à 10^{-4} .

Exercice n°3

$$\begin{cases} u_0 &= 0,6 \\ u_{n+1} &= 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année 2020 + n .

1. • 2021 correspond à $n = 1$, donc $u_1 = 0,75u_0 \times (1 - 0,15u_0) = 0,75 \times 0,6 \times (1 - 0,15 \times 0,6) = 0,45 \times (1 - 0,09) = 0,45 \times 0,91 = 0,4095$ soit environ 410 individus.
- 2022 correspond à $n = 2$, donc $u_2 = 0,75u_1 \times (1 - 0,15u_1) = 0,75 \times 0,4095 \times (1 - 0,15 \times 0,4095) = 0,307125 \times (1 - 0,061425) = 0,307125 \times 0,938575 \approx 0,2882$ soit environ 288 individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1 - 0,15x).$$

2. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0; 1]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 0,75(1 - 0,15x) - 0,75x \times 0,15 = 0,75 - 0,1125x - 0,1125x = 0,75 - 0,225x.$$

$$\text{Or } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 0,225x \leq 0,225 \Rightarrow -0,225 \leq -0,225x \leq 0 \Rightarrow$$

$$0,75 - 0,225 \leq 0,75 - 0,225x \leq 0,75 \text{ ou enfin } 0,525 \leq f'(x) \leq 0,75.$$

Sur $[0; 1]$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante de $f(0) = 0$ à $f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0,6375$.

3. Sur $[0; 1]$, $f(x) = x \iff 0,75x(1 - 0,15x) = x \iff 0,75x(1 - 0,15x) - x = 0 \iff$
 $x[0,75(1 - 0,15x) - 1] = 0 \iff x(0,75 - 0,1125x - 1) = 0 \iff x(-0,25 - 0,1125x) = 0 \iff$
 $\begin{cases} x = 0 \text{ ou } \\ -0,25 - 0,1125x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } \\ -0,25 = 0,1125x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou } \\ -\frac{0,25}{0,1125} = x \end{cases}.$
Or $-\frac{0,25}{0,1125} < 0$ donc dans $[0; 1]$, $S = \{0\}$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a. **Initialisation** : on a vu que $0 \leq 0,4095 \leq 0,6 \leq 1$, soit $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$: la relation est vraie au rang 0;

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$; la fonction f étant strictement croissante sur $[0; 1]$, on a donc : $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$,

soit puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75 \times (1 - 0,15) = 0,6375 \leq 1$:

$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$: la relation est donc vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n naturel quelconque, elle est vraie au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence :

Pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

- b. La suite (u_n) est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0; elle est donc convergente.

- c. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) converge vers un nombre $\ell \geq 0$ et ce nombre ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$, dont on a vu à la question 3. qu'elle n'avait que 0 comme solution.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = 0$.

5. a. L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroît, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.
- b. L'algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont supérieurs à 0,02
Il s'arrête à $n = 11$ car $u_{10} \approx 0,019$
L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2031.

Exercice n°4

$$u_0 = 1, u_1 = k \text{ et } u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{ku_n} \text{ pour tout entier naturel } n$$

1. On a $u_2 = \frac{u_1^2}{ku_0} = \frac{k^2}{k \times 1} = k$;

$$u_3 = \frac{u_2^2}{ku_1} = \frac{k^2}{k \times k} = 1;$$

$$u_4 = \frac{u_3^2}{ku_2} = \frac{1^2}{k \times k} = \frac{1}{k^2}.$$

2. a. On tape dans la cellule B4 : =B3^2/(\$E\$2*B2).

b. Pour $k = e$, il semble que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Pour $k = 0,9$, il semble que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Dans la suite, on suppose que $k = e$.

On a donc $u_0 = 1, u_1 = e$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{eu_n}$.

3. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

a. Comme $u_n > 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\text{D'autre part } u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{eu_n} \iff \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{eu_n} \iff e \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

On déduit :

$$\ln \left(e \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \right) = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \iff \ln e + \ln \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ soit } 1 + v_{n+1} = v_n \iff v_{n+1} = v_n - 1.$$

Cette égalité montre que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 de premier terme $v_0 = \ln u_1 - \ln u_0 = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times (-1)$, soit $v_n = 1 - n$.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul la suite (S_n) par $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

a. On a donc $S_n = 1 + (1 - 1) + (1 - 2) + \dots + (1 - (n - 1)) = n \times 1 - (1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1))$

$$= n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n - n(n-1)}{2} = \frac{n(2 - (n-1))}{2} = \frac{n(3-n)}{2}.$$

b. On a vu que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$, donc

$$S_n = v_0 + \dots + v_n = \ln \frac{u_1}{u_0} + \ln \frac{u_2}{u_1} + \dots + \ln \frac{u_n}{u_{n-1}} + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \frac{u_1}{u_0} \times \frac{u_2}{u_1} \times \dots \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \frac{u_n}{u_{n-1}}.$$

Tous les termes de u_1 à u_{n-1} se simplifient ; il ne reste plus que : $S_n = \ln \frac{u_n}{u_0} = \ln \frac{u_n}{1} = \ln u_n$.

5. a. D'après les deux questions précédentes on déduit que :

$$\left. \begin{array}{l} S_n = \frac{n(3-n)}{2} \\ S_n = \ln u_n \end{array} \right\} \text{ donc } \ln u_n = \frac{n(3-n)}{2} \text{ et donc } u_n = e^{\frac{n(3-n)}{2}}, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}.$$

b. $u_n < 10^{-50} \iff e^{\frac{n(3-n)}{2}} < 10^{-50} \iff \frac{n(3-n)}{2} < \ln 10^{-50} \iff -n^2 + 3n - 2 \ln 10^{-50} < 0$

L'équation $-n^2 + 3n - 2 \ln 10^{-50} = 0$ admet pour racines $n_1 \approx -13,75$ et $n_2 \approx 16,75$ donc $-n^2 + 3n - 2 \ln 10^{-50} < 0$ pour $n \geq 17$.

La plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$ est $n = 17$.

On vérifie à la calculatrice que $u_{16} \approx 6,8 \times 10^{-46} > 10^{-50}$ et que $u_{17} = 2,1 \times 10^{-52} < 10^{-50}$.