

Stage de révisions

Spécialité : Mathématiques

Thème : Suites Numériques

Exercice 1 : Extrait de baccalauréat Métropole mars 2021 sujet 1

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,562 5
5	3	3,421 875
6	4	4,316 406 25

2. a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B?
b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.
b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n) .
c. Démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
b. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 2 : Extrait de baccalauréat Métropole mars 2021 sujet 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1.
 - a. Calculez u_1 et v_1 .
 - b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.
 - c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.
 - d. En déduire la limite de la suite (u_n) .
2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$$

- a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

- b. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}.$$

- c. Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.
- d. Démontrer que pour tout entier naturel n ,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

- e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil() :  
    n = 0  
    r = 1  
    while abs(r-sqrt(2)) > 10**(-4) :  
        r = (2+r)/(1+r)  
        n = n+1  
    return n
```

(abs désigne la valeur absolue, sqrt la racine carrée et $10^{**}(-4)$ représente 10^{-4})
La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?

Exercice 3 : Extrait de baccalauréat Amérique du Nord mai 2021

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,6 \\ u_{n+1} &= 0,75u_n(1 - 0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1 - 0,15x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0; 1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

4.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
 - a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
 - b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace()
    u = 0,6
    n = 0
    while u > 0,02
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)
        n = n+1
    return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `menace()`.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 : Extrait de baccalauréat Amérique du Sud novembre 2018 (DIFFICILE !)

Soit k un réel strictement positif.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = k$ et, pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{ku_n}.$$

On admet que tous les termes de la suite (u_n) existent et sont strictement positifs.

- Exprimer u_2 , u_3 et u_4 en fonction de k .
- À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes de la suite (u_n) pour deux valeurs de k .

La valeur du réel k est entrée dans la cellule E2.

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	n	$u(n)$				1	n	$u(n)$			
2	0	1		$k =$	2,7182818	2	0	1		$k =$	0,9
3	1	2,7182818				3	1	0,9			
4	2	2,7182818				4	2	0,9			
5	3	1				5	3	1			
6	4	0,1353353				6	4	1,2345679			
7	5	0,0067319				7	5	1,6935088			
8	6	0,0001234				8	6	2,5811748			
9	7	8,315E-07				9	7	4,3712422			
10	8	2,061E-09				10	8	8,2252633			
11	9	1,88E-12				11	9	17,196982			
12	10	6,305E-16				12	10	39,949576			
13	11	7,781E-20				13	11	103,11684			
14	12	3,533E-24				14	12	295,7362			
15	13	5,9E-29				15	13	942,40349			
16	14	3,625E-34				16	14	3336,7738			

- Quelle formule, saisie dans la cellule B4, permet par recopie vers le bas de calculer tous les termes de la suite (u_n) ?
- Conjecturer, dans chaque cas, la limite de la suite (u_n) .

Dans la suite, on suppose que $k = e$.

On a donc $u_0 = 1$, $u_1 = e$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{eu_n}$.

- On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_0 = 1$.
 - En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
- On définit, pour tout entier naturel n non nul la suite (S_n) par $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = \frac{n(3-n)}{2}$.
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $S_n = \ln(u_n)$.
- Exprimer u_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (u_n) .
 - Trouver la plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$ par la méthode de votre choix (écriture d'un algorithme, résolution d'inéquation, etc.)

Brainstorming sur les incontournables à connaître :

Ces dernières pages sont destinées à recueillir tous les éléments du cours dont vous aurez besoin pour vos révisions.

Brainstorming sur les incontournables à connaître :

Ces dernières pages sont destinées à recueillir tous les éléments du cours dont vous aurez besoin pour vos révisions.