

Exercice n°1**Partie A**

1. $a_1 = a_0 \times \frac{85}{100} + 450 = 200 \times \frac{85}{100} + 450 = 620$

2. Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3000$.

a. • $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
 $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$

• $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2800$.

b. On en déduit que, pour tout n , on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.

c. Or $u_n = v_n + 3000$ donc, pour tout entier naturel n , $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.

4. Le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise est le nombre entier n tel que $a_n > 2500$; on résout cette inéquation :

$$a_n > 2500 \iff -2800 \times 0,85^n + 3000 > 2500 \iff 500 > 2800 \times 0,85^n \iff \frac{500}{2800} > 0,85^n$$

$$\iff \ln\left(\frac{500}{2800}\right) > \ln(0,85^n) \iff \ln\left(\frac{5}{28}\right) > n \times \ln(0,85) \iff \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} < n$$

Or $\frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} \approx 10,6$, donc le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500 est 11.

Exercice n°2

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geq 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

On a ainsi $p(A_1) = 1$.

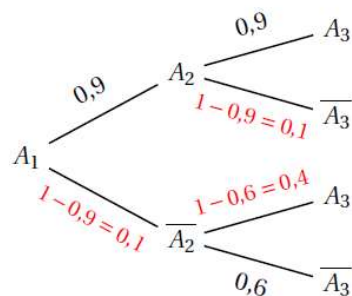
1. a. On complète l'arbre de probabilités relatif aux trois premières semaines.

- b. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_2 \cap A_3) + P(\overline{A_2} \cap A_3) \\ &= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P(\overline{A_2}) \times P_{\overline{A_2}}(A_3) \\ &= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4 = 0,81 + 0,04 = 0,85 \end{aligned}$$

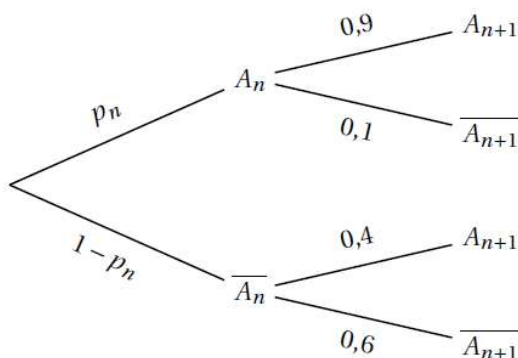
- c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 est :

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0,9 \times 0,9}{0,85} \approx 0,95.$$



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geq 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. On représente un arbre pondéré correspondant aux semaines n et $n+1$:



D'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = p_n \times 0,9 + (1 - p_n) \times 0,4 = 0,5p_n + 0,4.$$

3. a. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $p_n > 0,8$.

- **Initialisation**

On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0,8$; la propriété est vraie au rang 1.

- **Hérédité**

Soit un entier naturel $k \geq 1$ tel que la propriété soit vraie au rang k , c'est-à-dire $p_k > 0,8$. C'est l'hypothèse de récurrence.

On va démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $p_k > 0,8$ donc $0,5p_k > 0,4$ et donc $0,5p_k + 0,4 > 0,8$ qui signifie $p_{k+1} > 0,8$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

- **Conclusion**

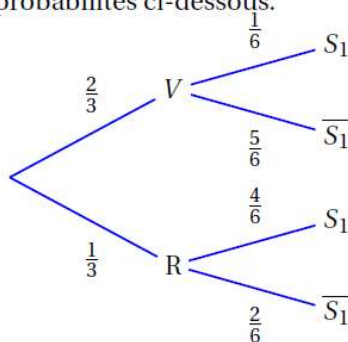
La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire pour tout $k \geq 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0,8$.

- b. Pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} - p_n = 0,5p_n + 0,4 - p_n = 0,4 - 0,5p_n$.
 Or $p_n > 0,8$ donc $0,5p_n > 0,4$ donc $-0,5p_n < -0,4$ et donc $0,4 - 0,5p_n < 0$.
 On en déduit que, pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et donc que la suite (p_n) est strictement décroissante.
- c. Pour tout $n \geq 1$, $p_n > 0,8$ donc la suite (p_n) est minorée par $0,8$.
 On a vu aussi que la suite (p_n) était décroissante.
 D'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (p_n) est convergente.
4. On pose pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = p_n - 0,8$ donc $p_n = v_n + 0,8$.
- a. • $v_{n+1} = p_{n+1} - 0,8 = 0,5p_n + 0,4 - 0,8 = 0,5(v_n + 0,8) - 0,4 = 0,5v_n + 0,4 - 0,4 = 0,5v_n$
 • $v_1 = p_1 - 0,8 = 1 - 0,8 = 0,2$
 Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = 0,2$.
- b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \geq 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
 Comme pour tout $n \geq 1$, $p_n = v_n + 0,8$, on en déduit que $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
- c. La suite (v_n) est géométrique de raison $0,5$ et $-1 < 0,5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente vers 0 . Pour tout $n > 0$, $p_n = v_n + 0,8$ donc la suite (p_n) est convergente et a pour limite $0,8$.

Exercice n°3

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



- b. D'après la loi des probabilités totales on a :

$$P(S_1) = P(V \cap S_1) + P(R \cap S_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{18} + \frac{4}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

2. a. Le tirage d'un dé vert a une probabilité de $\frac{2}{3}$ et celui du dé rouge de $\frac{1}{3}$.

Dans chaque cas le lancer n fois de suite est un schéma de Bernoulli de paramètres n et $\frac{1}{6}$ pour le dé vert et de n et $\frac{4}{6}$ pour le dé rouge. La probabilité de tirer n 6 est donc :

$$P(S_n) = \overbrace{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}^{\text{dé vert}} + \overbrace{\frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{6}\right)^n}^{\text{dé rouge}} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

- b. D'après la question précédente la probabilité d'avoir tiré le dé vert puis obtenu n fois 6 est égale à $\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$ et la probabilité d'avoir tiré n fois de suite le 6 est égale à $P(S_n)$.

$$\text{On a donc } p_n = p_{\text{tirer } n \text{ 6}}(\text{tirer le dé rouge}) = \frac{\text{tirer } n \text{ 6 et tirer le dé rouge}}{\text{tirer } n \text{ 6}} =$$

$$\frac{\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \text{en multipliant par } 3 \times 3^n, \quad p_n = \frac{2^n}{2 \times \frac{1}{2^n} + 2^n} =$$

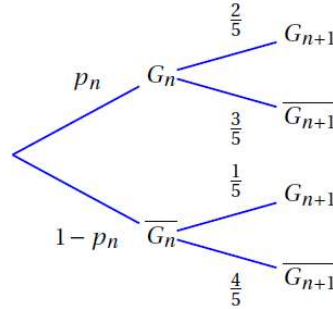
$$\frac{2^n}{2^{1-n} + 2^n} = \frac{1}{2^{1-2n} + 1} = \frac{1}{2 \times 2^{-2n} + 1} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2^{2n}} + 1} = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$

c. On a $p_n \geq 0,999 \iff \frac{1}{2 \times (\frac{1}{4})^n + 1} \geq 0,999 \iff 1 \geq 0,999 \left[2 \times (\frac{1}{4})^n + 1 \right] \iff$
 $1 \geq 1,998 (\frac{1}{4})^n + 0,999 \iff 0,001 \frac{1,998}{4^n} \iff 1 \geq \frac{1998}{4^n} \iff 4^n > 1998 \iff n \ln 4 \geq \ln 1998 \iff$
 $n \geq \frac{\ln 1998}{\ln 4} \approx 5,4$
 Conclusion : $n_0 = 6$.

Exercice n°4

Partie A :

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) = \frac{2}{5} p_n + \frac{1}{5} (1 - p_n) = \frac{1}{5} p_n + \frac{1}{5}.$$

3. a. Pour tout n entier naturel non nul, $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4}$ (d'après la question précédente)

$$\frac{1}{5} p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5} p_n - \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \left(p_n - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{5} u_n.$$

L'égalité $u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n$ montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

b. On sait que pour tout naturel supérieur ou égal à 1 : $u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} =$

$$u_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1}.$$

Comme $u_n = p_n - \frac{1}{4} \iff p_n = u_n + \frac{1}{4}$, on a finalement :

$$p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} + \frac{1}{4}.$$

c. Comme $\left| \frac{1}{5} \right| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5} \right)^{n-1} = 0$. Il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{4}$.

Au bout d'un très grand nombre de parties, la probabilité de gagner sera proche d'une chance sur quatre.

Exercice n°5

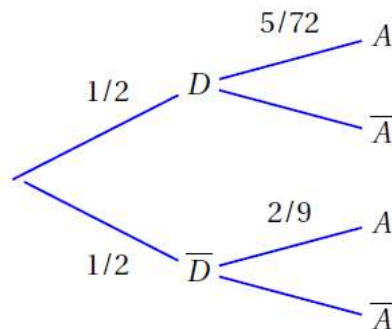
1. a. Il s'agit d'une expérience à deux issues avec une probabilité de succès $p = \frac{1}{6}$ et une probabilité d'échec $q = \frac{5}{6}$ que l'on répète de manière indépendante 3 fois. X représente le nombre de succès et suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$.

- b. L'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p est np . Donc

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

c. $P(X = 2) = \binom{3}{2} p^2 q^1 = 3 \times \frac{5}{6^3} = \frac{5}{72}$.

2. a.



L'événement « choisir le dé équilibré et obtenir exactement deux six » correspond à $D \cap A$.

$$p(D \cap A) = p(D) \times p_D(A) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{72} = \frac{5}{144}.$$

L'événement « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux six » correspond à $\bar{D} \cap A$.

$$p(\bar{D} \cap A) = p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(A).$$

On utilise un raisonnement analogue au 1.c. :

$$p_{\bar{D}}(A) = \binom{3}{2} p'^2 q'^1 \text{ où } p' = \frac{1}{3}. \text{ Donc } p_{\bar{D}}(A) = \frac{2}{9} \text{ et } p(\bar{D} \cap A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

b. On en déduit que $p(A) = p(D \cap A) + p(\bar{D} \cap A) = \frac{5}{144} + \frac{16}{144} = \frac{21}{144} = \frac{7}{48}$.

c. Il s'agit de calculer $p(\bar{D} \text{ sachant } A) = \frac{p(\bar{D} \cap A)}{p(A)} = \frac{1}{9} \times \frac{48}{7} = \frac{16}{21}$.

3. a. $p_D(B_n) = 1 - p_D(\text{« n'obtenir aucun 6 »}) = 1 - q^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. De même

$$p_{\bar{D}}(B_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n. \text{ On applique alors la formule des probabilités totales :}$$

$$p_n = p(B_n) = p(D) \times p_D(B_n) + p(\bar{D}) \times p_{\bar{D}}(B_n) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $\frac{5}{6}$ et $\frac{2}{3}$ appartiennent à $] -1 ; 1[$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$. Ce résultat est prévisible car, quel que soit le dé, à condition de jouer suffisamment longtemps, on a une quasi certitude d'obtenir au moins une fois un 6. (ici, $p_{22} > 0,99$ et $p_{100} \approx 1$).