

Stage de révisions

Spécialité : Mathématiques

Thème : Suites dans le cadre des probabilités

Exercice 1 : Extrait de baccalauréat centres étrangers 9 juin 2021

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n) .

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3\,000$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Exercice 2 : Extrait de baccalauréat centre étrangers 11 juin 2018

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

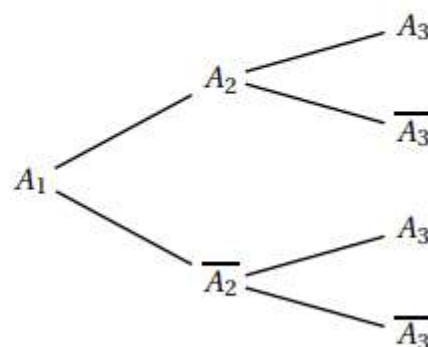
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geq 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».

On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1.
 - a. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.
 - b. Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.
 - c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.



Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geq 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
3.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $p_n > 0,8$.
 - b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
 - c. La suite (p_n) est-elle convergente ?
4. On pose pour tout entier $n \geq 1$: $v_n = p_n - 0,8$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n .
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (p_n) .

Exercice 3 : Extrait de baccalauréat Amérique du Sud novembre 2011

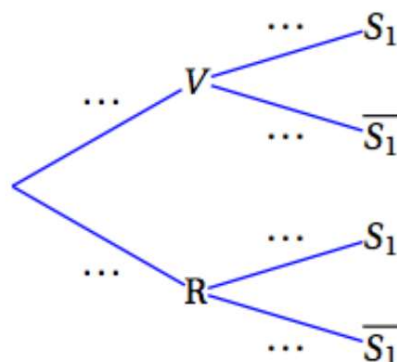
Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

- V l'évènement : « le dé tiré est vert »
- R l'évènement : « le dé tiré est rouge »
- S_1 l'évènement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

1. On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.

(a) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



(b) Calculer la probabilité $P(S_1)$.

2. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé n fois de suite. On note S_n l'évènement : « on obtient 6 à chacun des n lancers ».

(a) Démontrer que :

$$P(S_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des n lancers.

Démontrer que :

$$p_n = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$

(c) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $p_n \geq 0,999$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 4 : Extrait de baccalauréat Antilles-Guyane septembre 2011

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne.

Partie A :

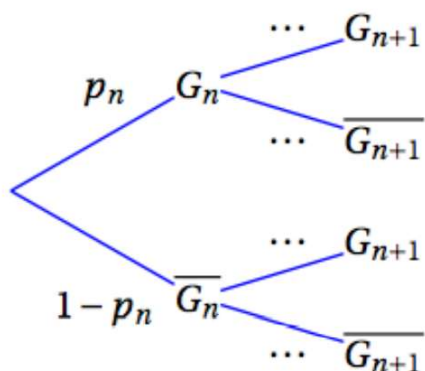
Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n , on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n -ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n .

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.
 - (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.
 - (b) Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
 - (c) Déterminer la limite de p_n .

Exercice 5 : Extrait de baccalauréat Pondichéry 2009

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

- Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ?
- Quelle est son espérance ?
- Calculer $P(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.

On considère les événements D et A suivants :

- D « le dé choisi est le dé bien équilibré » ;
- A : « obtenir exactement deux 6 ».

- a. Calculer la probabilité des événements suivants :

- « choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 » ;
- « choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6 ».

(On pourra construire un arbre de probabilité).

- b. En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$.

- c. Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé n fois de suite (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

On note B_n l'évènement « obtenir au moins un 6 parmi ces n lancers successifs ».

- Déterminer, en fonction de n , la probabilité p_n de l'évènement B_n .
- Calculer la limite de la suite (p_n) . Commenter ce résultat.

Brainstorming sur les incontournables à connaître :

Ces dernières pages sont destinées à recueillir tous les éléments du cours dont vous aurez besoin pour vos révisions.

Brainstorming sur les incontournables à connaître :

Ces dernières pages sont destinées à recueillir tous les éléments du cours dont vous aurez besoin pour vos révisions.