

Exercice n°1

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

- a. 0 b. 1 c. 0,24 **d. 0,76**

On cherche $P(X=0)$ qui vaut $\binom{9}{0} \times 0,03^0 \times 0,97^9 \approx 0,76$.

Réponse d.

2. La probabilité qu'exactly deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

- a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ b. $\binom{7}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$
c. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ d. $\binom{7}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

On cherche $P(X=2)$ qui vaut $\binom{9}{2} \times 0,03^2 \times 0,97^7$.

Réponse c.

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

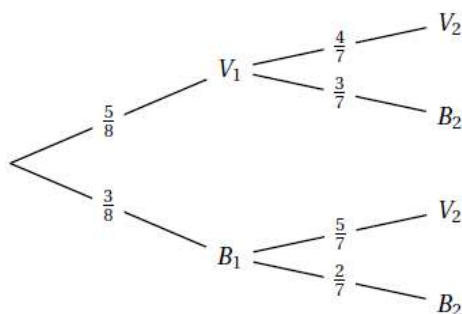
- a. $P(X < 1)$ b. $P(X \leq 1)$ c. $P(X \geq 2)$ **b. $1 - P(X=0)$**

On cherche $P(X \geq 1)$ qui vaut $1 - P(X=0)$.

Réponse d.

Après le premier tirage, il en reste 7. Si la boule du 1^{er} tirage est verte, il reste 4 boules vertes et 3 boules blanches ; si la boule du 1^{er} tirage est blanche, il reste 5 boules vertes et 2 boules blanches.

On construit un arbre de probabilités résumant la situation :



4. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

- a. $\frac{5}{8}$ **b. $\frac{4}{7}$** c. $\frac{5}{14}$ d. $\frac{20}{56}$

D'après l'arbre, $P_{V_1}(V_2) = \frac{4}{7}$.

Réponse b.

5. La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :

- a. $\frac{5}{8}$** b. $\frac{5}{7}$ c. $\frac{3}{28}$ d. $\frac{9}{7}$

D'après la formule des probabilités totales :

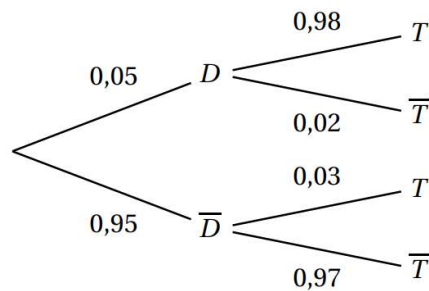
$$P(V_2) = P(V_1 \cap V_2) + P(B_1 \cap V_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{56} + \frac{15}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$$

Réponse a.

Exercice n°2

PARTIE I

1. On traduit la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



2. a. On a : $P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,05 \times 0,98 = 0,049$.
- b. On a de même : $P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,95 \times 0,3 = 0,0285$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) = 0,049 + 0,0285 = 0,0775.$$

3. La valeur prédictive positive du test est égale à :

$$P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,049}{0,0775} \approx 0,6322, \text{ soit } 0,632 \text{ au millième près.}$$

Comme $0,632 < 0,95$ on peut en déduire que le test n'est pas efficace.

PARTIE II

1. Le choix de l'échantillon étant assimilé à un tirage avec remise et avec une probabilité constante de choisir un produit défectueux égale à 0,05, on peut donc dire que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,05$.
2. On a : $p(X = 0) = 0,05^0 \times 0,95^{20}$.
Donc la probabilité cherchée est $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,95^{20} \approx 0,642$, soit 0,64 au centième près.
3. On a : $E = n \times p = 20 \times 0,05 = 1$.
Cela signifie que sur un grand nombre de tirages d'échantillons on trouvera 1 pièce défectueuse sur 20 pièces tirées.

Exercice n°3

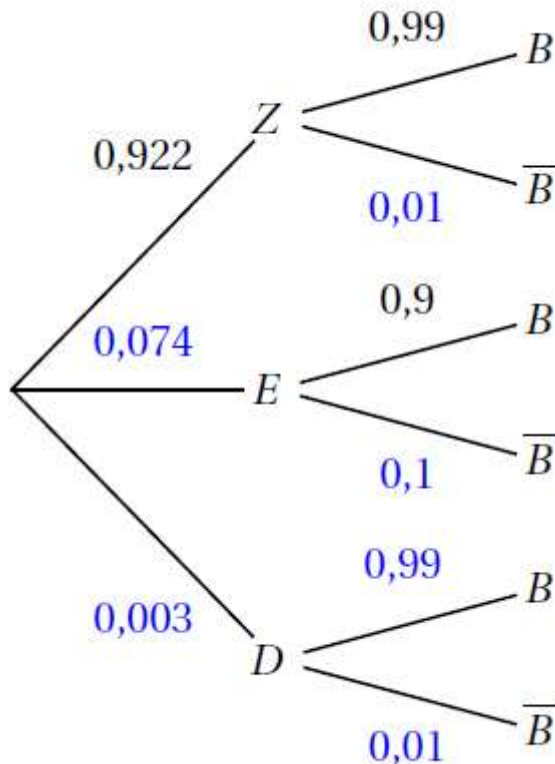
Partie A

On se place dans le cas où l'on envoie, sur le canal, successivement 8 bits qui forment un octet. On envoie un octet au hasard. On suppose la transmission de chaque bit indépendante de la transmission des bits précédents. On admet que la probabilité qu'un bit soit mal transmis est égale à 0,01. On note X la variable aléatoire égale au nombre de bits mal transmis dans l'octet lors de cette communication.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et de probabilité 0,01.
2. On a $P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,01^2 \times (1 - 0,01)^{8-2} = 28 \times 0,01^2 \times 0,99^6 \approx 0,00263$ soit 0,0026 à 10^{-4} près.
3. On a $P(X = 0) = 0,01^0 \times 0,99^8 \approx 0,9227$ et $P(X = 1) = 8 \times 0,01 \times 0,99^7 \approx 0,0746$.
Donc $P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \approx 1 - (0,9227 + 0,0746 + 0,0026) = 1 - 0,9999$ soit 0,0001 ce qui est effectivement négligeable.

Partie C

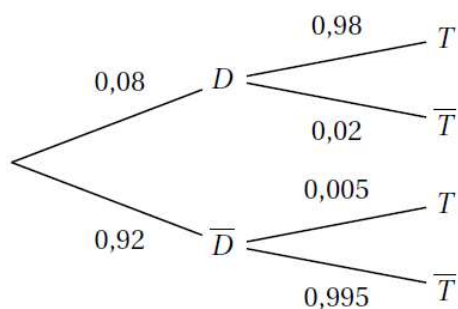
1. Voir à la fin.
2. La probabilité demandée est $P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,075 \times 0,9 = 0,0675$.
3. D'après la loi des probabilités totales :
 $P(B) = P(Z \cap B) + P(E \cap B) + P(D \cap B) = 0,922 \times 0,99 + 0,074 \times 0,9 + 0,003 \times 0,99 = 0,98325$ soit 0,9833 à 10^{-4} près.



Exercice n°4

Partie A

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) : \text{or}$$

$$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784 \text{ et}$$

$$P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,00460. \text{ Donc :}$$

$$P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083.$$

3. a. La probabilité conditionnelle $P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0784}{0,083} \approx 0,9445$, soit 0,945 au millièmè près.

b. D'après la question précédente $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. a. Quel que soit l'athlète choisi la probabilité que cet athlète présente un test positif est 0,103. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.

b. On sait que $E = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$: ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

c. La probabilité qu'aucun athlète ne soit contrôlé positif est :

$$0,103^0 \times (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,5807 \text{ soit environ } 0,581 \text{ au millièmè près.}$$

Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :

$$1 - 0,581, \text{ soit } 0,419 \text{ au millièmè près.}$$

2. On a pour n athlètes contrôlés, $P(X = 0) = 0,103^0 \times 0,897^n = 0,897^n$.

Il faut donc trouver n tel que :

$$1 - 0,897^n \geq 0,75 \iff 1 - 0,75 \geq 0,897^n \iff 0,25 \geq 0,897^n.$$

La calculatrice donne le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette inéquation : pour $n = 13$, on a $0,897^{13} \approx 0,243$.

Il faut donc contrôler 13 athlètes en moyenne pour en trouver un positif.