

Stage de révisions

Spécialité : Mathématiques

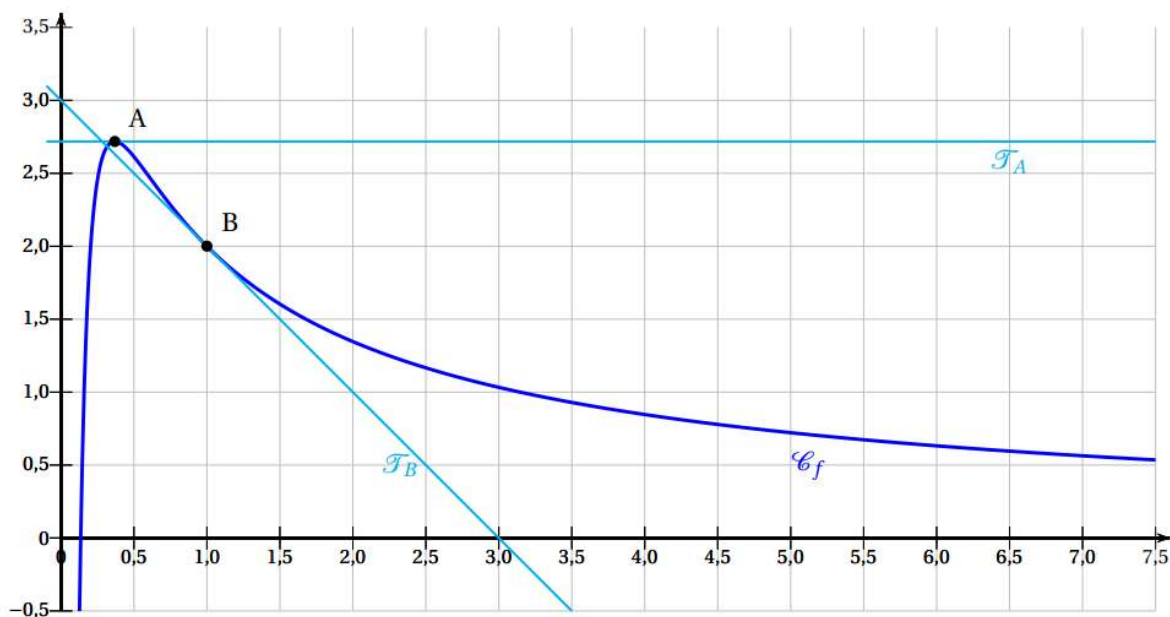
Thème : Fonctions convexes

Exercice 1 : Extrait de baccalauréat Sujet 0 2021

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$;
- la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e} ; e\right)$;
- la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1 ; 2)$.

La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3 ; 0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 3)$.



5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f . On admet que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$

$$f''(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3}.$$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice 2 : Extrait de baccalauréat Metropole mars 2021 sujet 1

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

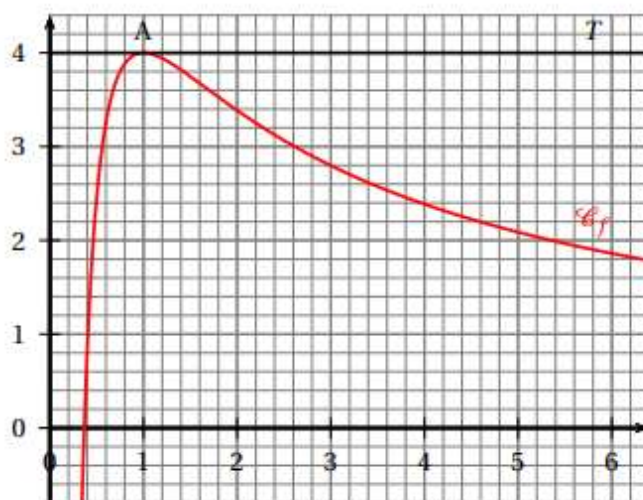
4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.

On justifiera que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Exercice 3 : Extrait de baccalauréat Amérique du nord mai 2021

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f , deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point $A(1; 4)$.



Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

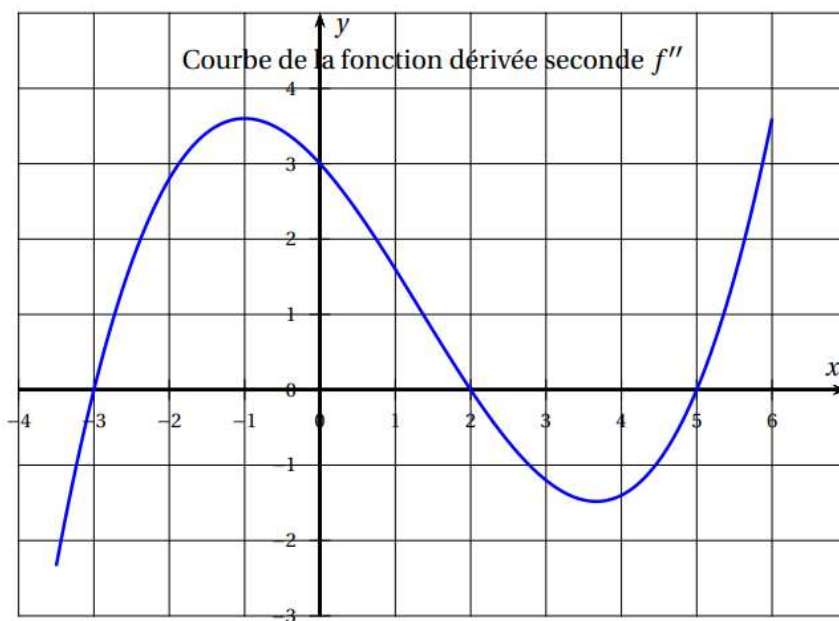
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

Exercice 4 : Extrait de baccalauréat Asie 8 juin 2021

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3, 5 ; 6]$.



- A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.
- B. La fonction f admet trois points d'inflexion.
- C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

Exercice 5 : Extrait de baccalauréat ES Nouvelle Calédonie mars 2014

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 5]$ par

$$f(x) = (3 - x)e^x + 1,$$

soit f' sa fonction dérivée et soit f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2 ; 5]$,
 $f'(x) = (2 - x)e^x$ et $f''(x) = (1 - x)e^x$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 5]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2 ; 5]$.
Montrer que : $3 < \alpha < 4$.
4. (a) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 3.
Montrer que T a pour équation $y = -e^3x + 3e^3 + 1$.
(b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.
(c) Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[2 ; 5]$ et en déduire la convexité ou la concavité de f sur cet intervalle.
(d) En déduire que : $\alpha < 3 + \frac{1}{e^3}$.
On a donc : $3 < \alpha < 3 + \frac{1}{e^3} < 3,05$.

Exercice 6 : Inégalité et convexité

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$

1. Sur quel domaine f est-elle dérivable ? deux fois dérivable ?
2. Pour tout réel x dans ce domaine, déterminer une expression de $f'(x)$ et de $f''(x)$
3. f est-elle convexe ou concave sur $[0; +\infty[$?
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
5. En déduire que pour tout réel $x > 0$, $\sqrt{x} \leq \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

Brainstorming sur les incontournables à connaître :

Ces dernières pages sont destinées à recueillir tous les éléments du cours dont vous aurez besoin pour vos révisions.

Brainstorming sur les incontournables à connaître :

Ces dernières pages sont destinées à recueillir tous les éléments du cours dont vous aurez besoin pour vos révisions.